УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

***Ю. Г. Игнатьев*[1], *И. А. Кох*[2]**

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В УСЛОВИЯХ СКЕЙЛИНГА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В УНИТАРНОМ ПРЕДЕЛЕ

Сформулирована строгая постановка задачи о космологической эволюции сверхтепловых частиц с энергиями выше унитарного предела во Вселенной, описываемой точной моделью перехода с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. На основе сформулированной математической модели получены асимптотические оценки динамического спектра частиц сверхвысоких энергий, построена и исследована численная модель космологической эволюции таких частиц на инфляционной стадии расширения Вселенной. Показано, что ряд параметров спектра частиц фиксируются на инфляционной стадии.

Ключевые слова: Релятивистская кинетика, диффузия, космологическая эволюция, свервысокие энергии, скейлинг.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny

Введение

В 1986 году одним из Авторов на основе анализа условий локального термодинамического равновесия (ЛТР) в ультрарелятивистской Вселенной Фридмана и сечений взаимодействий элементарных частиц с энергиями выше так называемого *унитарного предела* была выдвинута гипотеза о возможном нарушении ЛТР в космологической плазме на ранних стадиях эволюции Вселенной и было предложено *унифицированное асимптотическое сечение*, (УАС), рассеяния частиц за унитарным пределом [1]. В дальнейшем на основе этой гипотезы и релятивистской кинетической теории была сформулирована и подробно исследована строгая математическая модель процесса восстановления ЛТР на ранних ультрарелятивистских стадиях эволюции Вселенной [2], [3], [4], [5], [6]. В указанных работах предполагалось[3], что инвариантное сечение рассеяния в четырехчастичных реакциях элементарных частиц за унитарным пределом асимптотически описывается УАС, образованным тремя фундаментальными константами $G, \hbar, c$[4]:

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi\beta}{sL(s)}, \tag{1}$$

где $\beta \sim 1$, $L(s)$ – логарифмический фактор:

$$L(s) = 1 + \ln^2\left(1 + \frac{s_0}{s}\right) > 1, \tag{2}$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта s (см., например, [9]): $dL/ds < 0$, и $s_0 = 4$ есть квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$L(s_0) \simeq 1, \tag{3}$$

а в комптоновской шкале энергий, то есть, при $s = m_e^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{L(m_e^2)}} \approx \frac{1}{102} \simeq \alpha \approx \frac{1}{137}, \tag{4}$$

где $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

В указанных работах исследовалась, в основном модель плазмы, основанная на предположении о малости числа неравновесных частиц, δn, по сравнению с числом равновесных, n_0:

$$\delta n \ll n_0, \tag{5}$$

что позволяло свести задачу к *модели энергобаланса* и затем строго ее решить. Основные выводы проведенных исследований кратко можно сформулировать следующим образом.

[1]E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2]E-mail: irina_kokh@rambler.ru

[3]см. также монографии [7,8]

[4]Всюду в статье принята Планковская система единиц $G = \hbar = c = 1$.

1. В космологической сингулярности ультрарелятивистской Вселенной при условии восстановления скейлинга взаимодействий элементарных частиц за унитарным пределом начальное статистическое состояние космологической плазмы является неопределенным и может сильно отклоняться от локально равновесного.

2. В ходе космологической эволюции состояние локального термодинамического в ультрарелятивистской плазме постепенно, в целом, восстанавливается, однако, на каждый момент космологического времени в плазме присутствует уменьшающаяся, но тем не менее, конечная доля неравновесных сверхтепловых частиц.

3. Эти свойства космологической эволюции плазмы являются следствием *асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе* [10–12].

В связи с экспериментальным обнаружением ускорения Вселенной в дальнейшем было построено обобщение этой модели на случай Вселенной с произвольным ускорением [13–17], основанное на точном решении уравнений Эйнштейна, описывающем переход с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. В этих работах было показано, что на инфляционной стадии эволюции Вселенной неравновесные параметры плазмы фиксируются, и локальное термодинамическое равновесие уже не восстанавливается никогда.

Кроме того, в работе [2] была построена и другая модель неравновесной Вселенной в предположении, что, фактически, все частицы являются неравновесными. Эта модель была основана на релятивистском обобщении уравнения типа Фоккера - Планка, полученного из релятивистских кинетических уравнений в приближении малого передаваемого при столкновениях импульса. Эта модель была первоначально построена в работе [2], в которой она и получила название *диффузионной модели.* Такая модель Вселенной могла бы реализовываться на самых ранних ее стадиях, когда число частиц еще сравнительно мало. В этой же работе были произведен предварительный анализ модели и получены критерии ее применимости. В дальнейшем, на основе полученного в работе [2] уравнения типа Фоккера - Планка в работах [18, 19] были построены численные модели процесса восстановления ЛТР в таких сверхнеравновесных космологических системах для ультрарелятивистской Вселенной. Эти модели выявили ряд феноменальных свойств процесса восстановления ЛТР: формирование двух пиков функции распределения энергии в области малых (тепловых) и сверхвысоких энергий.

Поэтому возникает естественным образом проблема построения обобщения диффузионной модели на случай произвольного ускорения Вселенной. Кроме того, как оказалось впоследствии, и сама диффузионная модель должна быть несколько математически скорректирована. Решению этих двух задач и посвящена данная статья. Мы не будем производить каких - либо оценок, подтверждающих реализацию описываемых диффузионных процессов во Вселенной и, тем самым, автоматически обеспечивающих фактор актуализации исследования. Наше исследование посвящено теоретическому аспекту процесса диффузии частиц сверхвысоких энергий, исследование которого необходимо для внутреннего развития релятивистской кинетической теории.

1. Кинетическая теория и уравнение Фоккера - Планка

1.1. Кинетические уравнения и функция распределения

Релятивистские кинетические уравнения относительно макроскопической функции распределения $f_a(x^i, p^k)$ частиц сорта «а» имеют вид [1], [4], [7], [20]:

$$p^i \tilde{\nabla}_i f_a(x,p) = \sum_{b,c,d} J_{ab \leftrightarrows cd}(x,p), \tag{1.1}$$

где $\tilde{\nabla}$ - оператор ковариантного дифференцирования Картана в фазовом пространстве $X \times P$:

$$\tilde{\nabla} = \nabla_i + \Gamma^j_{ik} p^k \frac{\partial}{\partial p^j}. \tag{1.2}$$

С помощью функции распределения $f_a(x,p)$ определены макроскопические моменты:

$$n^i_a(x) = \int\limits_{P(x)} f_a(x,p) p^i dP \tag{1.3}$$

- вектор плотности потока числа частиц сорта «а» и

$$T_a^{ik}(x) = \int\limits_{P(x)} p^i p^k f_a(x,p) dP \qquad (1.4)$$

- тензор энергии-импульса частиц сорта «а», где

$$dP = \sqrt{-g} d^3p/p^4 \qquad (1.5)$$

- инвариантный элемент объема импульсного пространства. Сворачивая формулу (1.4) с помощью метрического тензора g_{ik}, вследствие соотношения нормировки 4-импульса:

$$(p,p) = m_a^2, \qquad (1.6)$$

получим:

$$T_a(x) = m_a^2 \int\limits_{P(x)} f_a(x,p) dP, \qquad (1.7)$$

где $T_a(x)$ - след тензора энергии-импульса частиц сорта«а».

1.2. Кинематика четырехчастичных столкновений

Четырехчастичные реакции типа:

$$a + b \to c + d \qquad (1.8)$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами, s и t, которые имеют следующий смысл: $\sqrt{s}$- энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ):

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \qquad (1.9)$$

а t-релятивистский квадрат переданного импульса:

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2, \qquad (1.10)$$

где квадраты импульсов понимаются как скалярные четырехмерные квадраты:

$$p_a^2 = (p_a, p_a) = (p^4)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_a^2,$$

и так далее. Так, например:

$$(p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a p_b) + p_b^2 = m_a^2 + 2(p_a, p_b) + m_b^2.$$

При этом инвариантные амплитуды рассеяния $F(s,t)$, определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц, c и d, оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов (см., например, [9]):

$$\sum |M_{FJ}|^2 = \frac{|F(s,t)|^2}{(2S_c+1)(2S_d+1)}, \qquad (1.11)$$

где S_i - спины. С помощью инвариантной амплитуды $F(s,t)$ определяется полное сечение реакции (1.8) (см. [9]):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi^2 \lambda^2(s, m_a^2, m_b^2)} \int\limits_{t_{min}}^{0} dt |F(s,t)|^2, \qquad (1.12)$$

где λ - функция треугольника:

$$\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$$

$$t_{min} = -\frac{\lambda^2}{s}.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \to \infty, \qquad \frac{s}{m_i^2} \to \infty, \tag{1.13}$$

$\lambda \to s$, и формула (1.12) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s}; \tag{1.14}$$

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi s} \int\limits_0^1 dx |F(s,x)|^2. \tag{1.15}$$

Рассмотрим четырехчастичную реакцию вида (1.8). Трехмерные модули импульсов соответствующих частиц будем для краткости обозначать p, q, p', q'. Введем углы φ - между векторами импульсов частиц $\vec{p}$ и $\vec{q}$, ψ - между векторами импульсов $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$, а φ' - угол между векторами $\vec{p}\,'$ и $\vec{q}\,'$. Законы сохранения 4-х мерного импульса частиц запишем в виде:

$$\sqrt{m_a^2 + p^2} + \sqrt{m_b^2 + q^2} = \sqrt{m_c^2 + p'^{\,2}} + \sqrt{m_d^2 + q'^{\,2}} \tag{1.16}$$

- закон сохранения энергии и

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}\,' + \vec{q}\,' \tag{1.17}$$

- закон сохранения импульса. Далее найдем:

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2\sqrt{m_a^2 + p^2}\sqrt{m_b^2 + q^2} - 2pq\cos\varphi;$$

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2\sqrt{m_a^2 + p^2}\sqrt{m_c^2 + p'^2} + 2pp'\cos\psi.$$

В ультрарелятивистском пределе $p/m \to \infty$ получим из (1.16):

$$p + q = p' + q'. \tag{1.18}$$

Таким образом, возводя в квадраты соотношения (1.17) и (1.18), получим в ультрарелятивистском пределе:

$$pq(1 - \cos\varphi) = p'q'(1 - \cos\varphi'), \tag{1.19}$$

$$\lim_{p,q\to\infty} s = 2pq(1 - \cos\varphi) = 4pq\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\lim_{p,p'\to\infty} t = -2pp'(1 - \cos\psi) = -4pp'\cos^2\frac{\psi}{2}. \tag{1.20}$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе для переменной x получим соотношение:

$$x = \frac{q(1 - \cos\varphi)}{p'(1 - \cos\psi)}. \tag{1.21}$$

Полагая $p' = p - \Delta p$, $q' = q - \Delta q$, вследствие закона сохранения энергии (1.18) получим:

$$\Delta q = -\Delta p,$$

следовательно:

$$p' = p - \Delta p; \qquad q' = q + \Delta p. \tag{1.22}$$

Величину Δp в ультрарелятивистском пределе (1.13) можно записать в форме:

$$\Delta p = x(p - q) - \cos\varphi\sqrt{x(1 - x)(4pq - s)}. \tag{1.23}$$

Инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (1.13) должны быть функциями лишь переменной $x = -t/s$, то есть:

$$|F(s,t)| = |F(x)|, \; (s \to \infty). \tag{1.24}$$

Но тогда вследствие (1.15)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s}\int\limits_0^1 dx|F(x)|^2 = \frac{\mathrm{Const}}{s}, \tag{1.25}$$

- полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, то есть, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

1.3. Кинетические уравнения для Вселенной Фридмана

Рассмотрим кинетические уравнения в метрике Фридмана. В случае однородного изотропного распределения $f(\eta, p)$ в метрике Фридмана:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) = dt^2 - a^2(t)dl^2, \tag{1.26}$$

где:

$$dl^2 = d\chi^2 + \rho^2(\chi)d\Omega^2, \tag{1.27}$$

$$\rho(\chi) = \begin{cases} \mathrm{sh}(\chi), & k=-1; \\ \chi, & k=0; \\ \sin(\chi), & k=+1. \end{cases}$$

k - индекс кривизны трехмерного пространства, кинетические уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot a}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2+p^2}}\sum_{b,c,d} J_{ab\leftrightarrows cd}(t,p), \tag{1.28}$$

или в переменных η, p:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{a(\eta)}{\sqrt{m_a^2+p^2}}\sum_{b,c,d} J_{ab\leftrightarrows cd}(t,p), \tag{1.29}$$

где точкой обозначается производная по времени t, а штрихом - производная по временной переменной η, причем:

$$a(\eta)d\eta = dt.$$

В работе [12] показано, что в ультрарелятивистском пределе при условии конформной инвариантности негравитационных макроскопических полевых уравнений и масштабной инвариантности матричных элементов взаимодействия:

$$|\overline{M}(p,q|p',q')|^2 = |M(p,q|p',q')|^2, \tag{1.30}$$

кинетические уравнения конформно инвариантны.

1.4. Вывод интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка

Интеграл упругих парных столкновений для реакции вида (1.8) для изотропных распределений $f_a(p, x^i)$, зависящих лишь от абсолютной величины импульса, можно привести к виду [4][5]:

$$J_{ab}(p) = \frac{2S_b+1}{(2\pi)^3 p}\int\limits_0^\infty \frac{qdq}{\sqrt{m_b^2+q^2}}\int\limits_0^{4pq}\frac{ds}{16\pi}\int\limits_0^1 dx\overline{|M(s,x|^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left[f_a(p')f_b(q') - f_a(p)f_b(q)\right], \tag{1.31}$$

куда необходимо подставить выражения (1.22) для p', q' и (1.23) для Δp. Основная идея вывода релятивистского интеграла столкновений в форме Фоккера - Планка заимствована из работы Ландау [22]. Будем предполагать, что при столкновениях частиц в среднем передается небольшой импульс, то есть,

$$\overline{(p_a-p_c)^2} \ll \overline{p^2}, \tag{1.32}$$

[5] На самом деле приведение интеграла столкновений для изотропных распределений к простой форме, как и вывод интеграла столкновений в форме Фоккера - Планка, было впервые опубликовано в малодоступной работе [2], опубликованной в тяжелое для страны время на очень плохой бумаге. Поэтому из методических соображений мы повторим здесь этот вывод с учетом поправок к более поздним редакциям УАС.

чему соответствуют значения переменной $x \to 1$. Полагая

$$x = 1 - \xi^2, \tag{1.33}$$

разложим в ряд Тейлора интеграл столкновений по малости передаваемого импульса, то есть, по малости параметра $\xi^2 \ll 1$. Из формулы (1.23) имеем:

$$\Delta p = (1 - \xi^2)(p - q) - \cos\varphi\xi\sqrt{4pq - s}. \tag{1.34}$$

Удерживая члены порядка ξ^2, запишем разложения функций распределения:

$$f(p') = f(q) + \frac{df}{dq}[\cos\varphi\xi\sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dq^2}\xi^2(4pq - s)\cos^2\varphi;$$

$$f(q') = f(p) - \frac{df}{dp}[\cos\varphi\xi\sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dp^2}\xi^2(4pq - s)\cos^2\varphi.$$

При интегрировании по угловой переменной интегралы, линейные по ξ, исчезнут, поэтому для внутреннего интеграла мы получим выражение:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,[f(p')f(q') - f(p)f(q)] = f(p)f(q) + (p - q)\xi^2\left[f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp}\right] +$$
$$+\frac{1}{4}\xi^2(4pq - s)\left[f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2}\right]. \tag{1.35}$$

Проводя интегрирование по переменной x с учетом определения полного сечения рассеяния (1.15), положим:

$$A = \int\limits_0^1 |F(s,x)|^2(1 - x)dx;\ B = \int\limits_0^1 x|F(s,x)|^2dx, \tag{1.36}$$

так что:

$$A + B = \int\limits_0^1 |F(s,x)|^2dx. \tag{1.37}$$

Таким образом, согласно (1), (2) имеет место соотношение:

$$A + B = \frac{128\pi^2}{L(s)}, \qquad A \approx \frac{64\pi^2}{L(s)}. \tag{1.38}$$

В дальнейшем будем учитывать тот факт, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг, то есть, выполняется соотношение (1.25), согласно которому $F(s,x) \approx F(x)$, так что $A \approx \mathrm{Const}, B \approx \mathrm{Const}$. Тогда, произведя интегрирование по переменной s в полученном выражении, найдем:

$$J_{ab}(p) = A\frac{2S_b + 1}{(4\pi)^3p}\int\limits_0^\infty dq\left\{\left[f(p)\frac{df(q)}{dq} - f(q)\frac{df(p)}{dp}\right] +\right.$$
$$\left. + 2p^2q^2\left[f(p)\frac{d^2f(q)}{dq^2} - 2\frac{df(p)}{dp}\frac{df(q)}{dq} + f(q)\frac{d^2f(p)}{dp^2}\right]\right\}.$$

Произведем интегрирование по частям в части интеграла, содержащего вторые производные по переменной q, при этом:

$$\int\limits_0^\infty q^2\frac{d^2f(q)}{dq^2}dq = q^2\left.\frac{df(q)}{dq}\right|_0^\infty - 2\int\limits_0^\infty q\frac{df(q)}{dq}dq = -\,2qf(q)|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty f(q)q^2dq = 2\int\limits_0^\infty f(q)q^2dq,$$

где мы учли:

$$\lim_{q\to\infty} q^n f(q) = 0, \quad (0 \le n \le 3), \tag{1.39}$$

условие, необходимое для сходимости выражений для плотности числа частиц и энергии.

Таким образом, проводя интегрирование по частям, получим окончательно интеграл столкновений в форме Фоккера-Планка:

$$J_{ab}(p) = \frac{2(2S+1)}{\pi L(s)} \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int\limits_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \tag{1.40}$$

2 Кинетическое уравнение для сверхтепловой компоненты в диффузионном приближении

Подставляя полученный интеграл столкновений в форме Фоккера-Планка (1.40) в кинетическое уравнение (1.28), приведем его к виду при ультрарелятивистских значениях импульса p:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{2(2S+1)}{\pi L(s)} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int\limits_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \tag{2.1}$$

Нетрудно показать, что интегральными следствиями уравнения (2.1) являются законы сохранения числа и энергии ультрарелятивистских частиц:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q^2 f(q) dq, \Rightarrow a^3 n = \mathrm{Const} \tag{2.2}$$

– плотность числа частиц,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q^3 f(q) dq, \Rightarrow a^4 \mathcal{E}(t) = \mathrm{Const} \tag{2.3}$$

– плотность энергии частиц. Введем также след тензора энергии-импульса частиц:

$$T(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q f(q) dq. \tag{2.4}$$

Перейдем к новым переменным: времени η и так называемому *конформному импульсу* $\bar{p}$, который является интегралом движения свободных частиц в метрике Фридмана, по формуле (см., например, [1]):

$$\bar{p} = a(\eta) p, \tag{2.5}$$

так что на планковский момент времени, когда $a(\eta) = 1$, $\bar{p} = p$. Введем соответствующие конформные плотности:

$$\bar{n}(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \bar{q}^2 f(\bar{q}) d\bar{q}, \Rightarrow \bar{n} = \mathrm{Const} \equiv \bar{n}_0; \tag{2.6}$$

$$\bar{\mathcal{E}}(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \bar{q}^3 f(\bar{q}) d\bar{q}, \Rightarrow \bar{\mathcal{E}} = \mathrm{Const} \equiv \bar{\mathcal{E}}_0; \tag{2.7}$$

$$\bar{T}(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \bar{q} f(\bar{q}) d\bar{q}. \tag{2.8}$$

Введем также безразмерную функцию $\beta(\eta)$ с помощью отношения:

$$\beta(\eta)\bar{n} = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty f(\eta, \bar{p}) \bar{p} d\bar{p} \equiv \bar{T}(\eta). \tag{2.9}$$

Производя еще раз интегрирование по частям в уравнении (2.1), приведем его к более изящной форме относительно функции $f(\eta, \bar{p})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{A\bar{n}}{\bar{p}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \bar{p}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} + 2\beta(\eta) f \right) \tag{2.10}$$

– это и есть искомое кинетическое уравнение в диффузионном приближении.

Введем также среднюю конформную энергию частицы:

$$<\bar{p}>=\frac{\bar{\mathcal{E}}(\eta)}{\bar{n}(\eta)}\equiv\frac{\bar{\mathcal{E}}_0(\eta)}{\bar{n}_0(\eta)}=\mathrm{Const}. \tag{2.11}$$

Заметим, что вследствие определения (2.9) функция $\beta(\eta)$ сама является интегралом от функции распределения. Таким образом, несмотря на внешнюю простоту, уравнение (2.10) остается интегро - дифференциальным. Заметим также, что ультрарелятивистская равновесная функция распределения:

$$f_0=C(\eta)e^{-2\frac{\beta(\eta)}{\bar{p}}}, \tag{2.12}$$

где $C(\eta)$ - произвольная функция, обращает в нуль полученный интеграл столкновений. Это означает, что с течение времени $\eta\to\infty$ решение уравнения (2.10) стремится к равновесному распределению (2.12) с температурой:

$$\theta(\eta)=\frac{\beta(\eta)}{a(\eta)}\Rightarrow\bar{\theta}=\beta(\eta), \tag{2.13}$$

где $\bar{\theta}$ - конформная температура. Подставляя равновесную функцию распределения в правую часть кинетического уравнения (2.10), получим вследствие независимости переменных η и $\bar{p}$:

$$C=\mathrm{Const};\quad \beta=\mathrm{Const}\quad (\eta\to\infty)\Rightarrow\theta\to\bar{\theta}/a(\eta), \tag{2.14}$$

то есть, решения уравнения Фоккера - Планка асимптотически стремятся к равновесному распределению ультрарелятивистских частиц.

3. Решение уравнения Фоккера - Планка для Вселенной, переходящей из ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную

3.1. Точное решение уравнений Эйнштейна

В точной модели ускоренной Вселенной при переходе от ультрарелятивистской стадии к инфляционной, когда материя состоит из ультрарелятивистской материи с уравнением состояния $\mathcal{P}=\mathcal{E}/3$ и материи с уравнением состояния $\mathcal{P}-\mathcal{E}$, точное решение уравнений Эйнштейна имеет вид [15]:

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}}\sqrt{\mathrm{sh}(2\Lambda_0 t)}, \tag{3.1}$$

которое при $t\to 0$ переходит в ультрарелятивистское решение:

$$a(t)=\sqrt{t}, \tag{3.2}$$

а при $t\to\infty$ - в инфляционное решение:

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}}\mathrm{e}^{\Lambda_0 t}. \tag{3.3}$$

3.2. Нормировка уравнения Фоккера - Планка

С целью обезразмеривания задачи произведем перенормировку временных и импульсных переменных, а также функции распределения в уравнении Фоккера - Планка (2.10) следующим образом:

$$x=\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0},\quad f(\tau,x)=\frac{3\pi}{4(2S+1)}\frac{G(x,\tau)}{\bar{p}_0^4},$$

так что

$$\int\limits_0^\infty G(x)x^2dx=1,$$

и получим диффузионное уравнение относительно нормированной функции $G(x,\tau)$ в форме:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}x^2\left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G\right), \tag{3.4}$$

где

$$b(\tau) = \int\limits_0^\infty G(x,\tau)xdx, \tag{3.5}$$

а функция $G(x,\tau)$ должна удовлетворять начальным и граничным условиям вида:

$$G(x,0) = g_0(x), \tag{3.6}$$
$$\lim_{x\to\infty} G(x,\tau)x^3 = 0.$$

Вследствие нормировки и законов сохранения функция $g_0(x)$ начального распределения должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\int\limits_0^\infty g_0(x)x^2 = 1, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_0^\infty g_0(x)x^3 = 1. \tag{3.8}$$

3.3. Решение уравнения Фоккера - Планка методом последовательных приближений

Решим задачу Коши для уравнения (3.4) с начально - граничными условиями (3.6). Произведя в (3.4) подстановку

$$G(x,\tau) = \frac{V(x,\tau)}{x}, \tag{3.9}$$

получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,\tau), \tag{3.10}$$

где

$$F(x,\tau) = \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}xVb(\tau), \tag{3.11}$$

$$b(\tau) = \int\limits_0^\infty V(x,\tau)dx, \tag{3.12}$$

причем

$$V(x,0) = xg_0(x), \quad V(0,\tau) = 0. \tag{3.13}$$

В [18, 19] были предложены методы решения подобной задачи разложением решений по малости временной функции $b(\tau) = 0$ ($b = b^{(0)} + b^{(1)} + b^{(2)} + \ldots$). Введем следующие обозначения: последовательные приближения $V(x,t)$ обозначим через $V^{(i)}(x,t)$, где $i = 0,1,2,\ldots$; значение функции $V(x,t)$ с учётом i -ой поправки будем записывать следующим образом:

$$V_i(x,t) = \sum_{k=0}^{i} V^{(k)}(x,t). \tag{3.14}$$

Следуя этому методу, в нулевом приближении получим параболическое уравнение:

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial x^2}, \tag{3.15}$$

где $V^{(0)}$ должно удовлетворять следующим начально - краевым условиям:

$$\begin{aligned} V^{(0)}(0,\tau) &= 0; \\ V^{(0)}(x,0) &= \varphi(x); \\ x,\tau &\in \mathbb{R}^{+}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

В первом приближении получим:

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x} x V^{(0)} b^{(0)}(\tau), \tag{3.17}$$

где

$$b^{(0)}(\tau) = \int\limits_0^\infty V^{(0)}(x,\tau)dx, \tag{3.18}$$

а функция $V^{(1)}$ должно удовлетворять уже нулевым начально-краевым условиям:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(0,\tau) &= 0; \\ V^{(1)}(x,0) &= 0; \\ x,\tau &\in \mathbb{R}^{+}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Второе условие в (3.19) получается следующим образом:

$$V(x,0) = V^{(0)}(x,0) + V^{(1)}(x,0) + \ldots \Rightarrow V^{(1)}(x,0) = 0.$$

В результате приходим к начально - краевым задачам Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод решения таких задач описан в [27] и основан на известной лемме математической физики:

Лемма 1. *Пусть функция $\tilde{\varphi}(x)$ определена на бесконечной прямой $\mathbb{R}^1$, имеет на ней ограниченные производные до N-ого порядка включительно, и линейная комбинация*

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \tilde{\varphi}^{(k)}(x),$$

где $a_k = \mathrm{const}$, $k = 0,1,\ldots$, нечетна относительно точки $x = 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0.$$

Выберем в качестве функции начального распределения функцию вида $g_0(x) = a\chi\left(x_0 - x\right)$, где переменные a и x_0 находятся из условия (3.7). Таким образом, имеем:

$$g_0(x) = \frac{81}{64}\chi\left(\frac{4}{3} - x\right). \tag{3.20}$$

Тогда функция $\varphi(x) = x g_0(x,0)$ будет иметь вид:

$$\varphi(x) = \frac{81x}{64}\chi\left(\frac{4}{3} - x\right). \tag{3.21}$$

Используя метод [27], продолжим функцию первоначального распределения $\varphi(x)$ так, чтобы она стала нечетной на всей действительной оси. Построим это продолжение, $\widetilde{\varphi}(x)$, следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0;\\ -\varphi(-x), & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.22}$$

Согласно [27] решение задачи (3.15)-(3.16) можно записать в виде интеграла Пуассона:

$$V^{(0)}(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(x,\xi,\tau)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi, \tag{3.23}$$

где функция Грина, $\mathcal{G}(x,\xi,\tau)$, имеет вид

$$\mathcal{G}(x,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\Bigr).$$

Используя формулу (3.22), получим решение задачи (3.15)-(3.16) в виде:

$$u(x,\tau)=\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{G}(x,\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi-\int\limits_{-\infty}^{0}\mathcal{G}(x,\xi,\tau)\varphi(-\xi)d\xi.$$

Производя во втором интеграле в правой части формулы замену ξ на $-\xi$, получим

$$u(x,\tau)=\int\limits_{0}^{\infty}\{\mathcal{G}(x,\xi,\tau)-\mathcal{G}(x,-\xi,\tau)\}\varphi(\xi)d\xi=\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{G}_g(x,\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi, \tag{3.24}$$

где

$$\mathcal{G}_g(x,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\left\{\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\Bigr)-\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\Bigr)\right\}. \tag{3.25}$$

Функция $\mathcal{G}_g(x,\xi,\tau)$ является функция Грина задачи Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Таким образом, получим решение для функции нулевого приближения:

$$V^{(0)}(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\Bigr)-\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\Bigr)\right\}\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.26}$$

Аналогично, решение задачи (3.17)–(3.19) для функции первого приближения будет иметь вид:

$$V^{(1)}(x,\tau)=\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{G}_g(x,\xi,\tau-t)F(\xi,t)d\xi dt, \tag{3.27}$$

где

$$F(x,\tau)=\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}xV^{(0)}(x,\tau)\int\limits_{0}^{\infty}V^{(0)}(x,\tau)dx. \tag{3.28}$$

Таким образом, для поправки первого порядка получим:

$$V^{(1)}(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{dt}{\sqrt{(\tau-t)}}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\Bigr)-\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi)^2}{4(\tau-t)}\Bigr)\right\}F(\xi,t)d\xi. \tag{3.29}$$

Сделаем обратную подстановку $G=\frac{V}{x}$. В нулевом приближении функция $G(x,\tau)$ будет иметь вид:

$$G^{(0)}(x,\tau)=\frac{1}{2x\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\Bigr)-\exp\Bigl(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\Bigr)\right\}G^{(0)}(\xi,0)\xi d\xi. \tag{3.30}$$

В первом приближении функция $G(x,\tau)$ будет иметь вид:

$$G^{(1)}(x,\tau)=\frac{1}{2x\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau \frac{b^{(0)}(t)dt}{\sqrt{(\tau-t)}}\int\limits_0^\infty\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(\tau-t)}\right)\right\}\frac{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi^2G^{(0)}(\xi,t)d\xi, \quad (3.31)$$

где

$$b^{(0)}(\tau)=\int\limits_0^\infty G^{(0)}(x,\tau)xdx.$$

Подставляя в (3.30) функцию первоначального приближения (3.21), получим:

$$G^{(0)}(x,\tau)=\frac{81}{128}\frac{1}{x\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_0^{x_0}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right)\right\}\xi d\xi. \quad (3.32)$$

3.4. Вычисление вспомогательных интегралов

Вычислим вспомогательные интегралы

$$I_1(x_0,x)=\int\limits_0^{x_0}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right)\xi d\xi, \quad (3.33)$$

$$I_2(x_0,x)=\int\limits_0^{x_0}\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right)\xi d\xi. \quad (3.34)$$

Выполняя в (3.33) замену $\frac{x-\xi}{2\sqrt{\tau}}=z$, получим

$$I_1(x_0,x)=-2\sqrt{\tau}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}}e^{-z^2}(x-2\sqrt{\tau}z)dz=2\sqrt{\tau}\left(x\int\limits_{\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}e^{-z^2}dz-2\sqrt{\tau}\int\limits_{\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}e^{-z^2}zdz\right).$$

Таким образом,

$$I_1(x_0,x)=\sqrt{\tau\pi}x\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)+2\tau\left(\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right)\right). \quad (3.35)$$

Аналогично получим

$$I_2(x_0,x)=\sqrt{\tau\pi}x\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)+2\tau\left(\exp\left(\frac{x^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}\right)\right). \quad (3.36)$$

В результате имеем следующее формальное решение уравнения (3.4) с начальными и граничными условиями (3.6):

$$G^{(0)}(x,\tau)=\frac{81}{128}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)+\frac{81\sqrt{\tau}}{64x\sqrt{\pi}}\left(\exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right)\right), \quad (3.37)$$

$$G^{(1)}(x,\tau)=\frac{2}{x}\int\limits_0^\tau b^{(0)}(t)G^{(0)}(x,t)dt, \quad (3.38)$$

где

$$x_0=\frac{4}{3},$$

$$b^{(0)}(\tau) = \int\limits_0^\infty G^{(0)}(x,\tau)x dx. \tag{3.39}$$

Найдем $b^{(0)}(\tau)$, из (3.39) и (3.37) имеем:

$$b^{(0)}(\tau) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{81}{128} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) x - \operatorname{erf}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) x \right) + \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right)\right)\right) dx. \tag{3.40}$$

Вычисляя (3.40), получим

$$b^{(0)}(\tau) = \frac{81}{64}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} x_0 e^{-\frac{x_0^2}{4\tau}} - \frac{81}{64}\tau \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{81}{128} x_0^2 \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}}\right). \tag{3.41}$$

Подставляя значение x_0 в (3.41), имеем

$$b^{(0)}(\tau) = \frac{27}{16}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{4}{9\tau}\right) - \frac{81}{64}\tau \operatorname{erf}\left(\frac{2}{3\sqrt{\tau}}\right) + \frac{9}{8} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{3\sqrt{\tau}}\right). \tag{3.42}$$

При численном моделировании функции $G^{(0)}(x,\tau)$ выясняем, что она удовлетворяет первому интегральному условию (3.7) (См. Рис. 1), но не удовлетворяет второму интегральному условию (3.7) (См. Рис. 2).

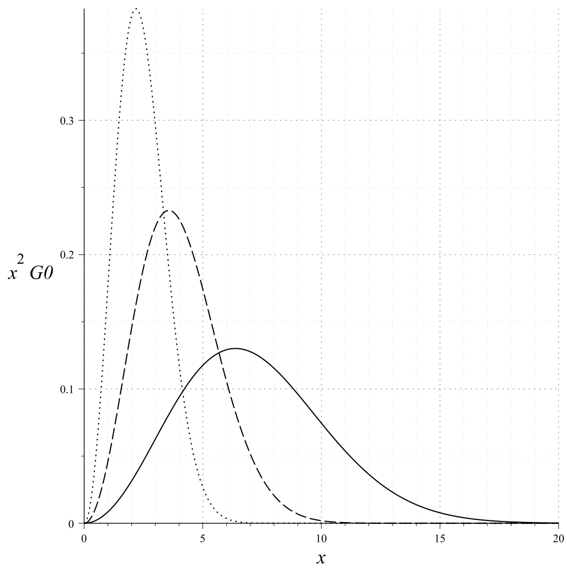

Рис. 1. Эволюция распределения плотности числа частиц в нулевом приближении. При $\tau = 0.1; 1; 10$.

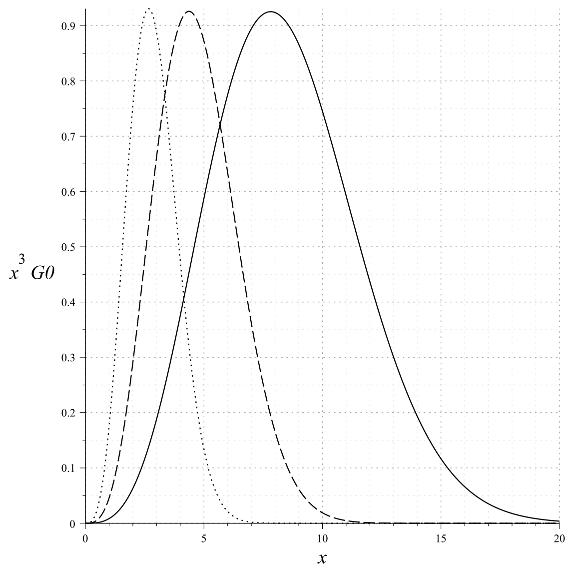

Рис. 2. Эволюция распределения плотности энергии частиц в нулевом приближении. При $\tau = 0.1; 1; 10$.

Полученное решение совпадает с решением, полученным в [19], что еще раз подтверждает его верность. Но здесь используется другое выражение для переменной τ .

4. Связь между кинетическим временем и мировым временем во Вселенной Фридмана

Для дальнейшего решения поставленной задачи, необходимо перейти обратно от безразмерного кинетического времени τ к переменной t. Разрешая связь между этими переменными, найдем следующее выражение для τ :

$$\tau = \pi\sqrt{2\Lambda_0} \int\limits_0^t \frac{dt}{\left(1 + \ln^2\left(1 + \frac{4}{{p_0}^2{T_0}^2}\right)\right)\sqrt{\operatorname{sh} 2\Lambda_0 t}}, \tag{4.1}$$

где

$$T_0 = \frac{45^{1/4} 32^{3/4} \sqrt{2\Lambda_0}}{\sqrt{\operatorname{sh}(2\Lambda_0 t)} (\pi^3 N_0)^{1/4}}. \tag{4.2}$$

Согласно [23] интеграл

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} 2t}} dt = \frac{1}{2} F(a, r),$$

где $a = \arccos \frac{1-\operatorname{sh}(2x)}{1+\operatorname{sh}(2x)}$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F(a, r)$- эллиптический интеграл первого рода. При исследовании функции $\tau(t)$ с помощью СКМ Maple было выявлено, что данная функция почти совпадает с функцией $F(t)$ (См. Рис. 3). Делаем вывод о том, что можно найти коэффициент α, такой что $\tau(t) = \alpha * F(t)$. Коэффициент α зависит от значений переменных N_0, p_0, смоделируем функцию зависимости α от p_0 при фиксированном значении $N_0 = 100$. В результате моделирования функции $\alpha(p_0)$, получили следующую функцию (См. Рис. 4):

$$\alpha(p_0) \approx 1 - \frac{6}{p_0^2}.$$

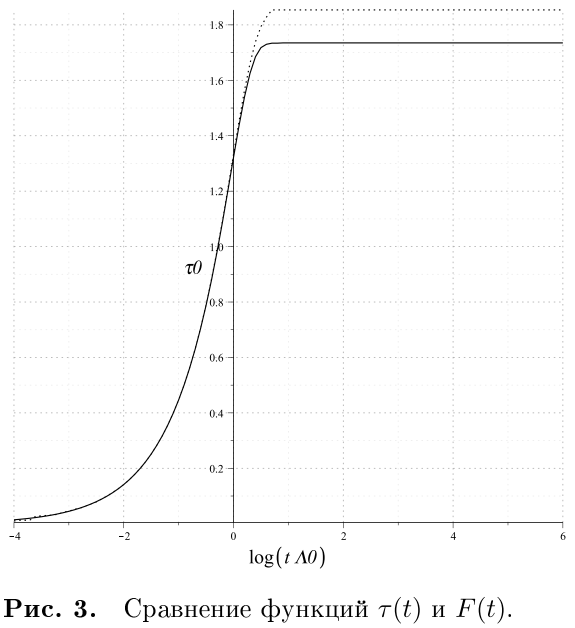

Рис. 3. Сравнение функций $\tau(t)$ и $F(t)$.

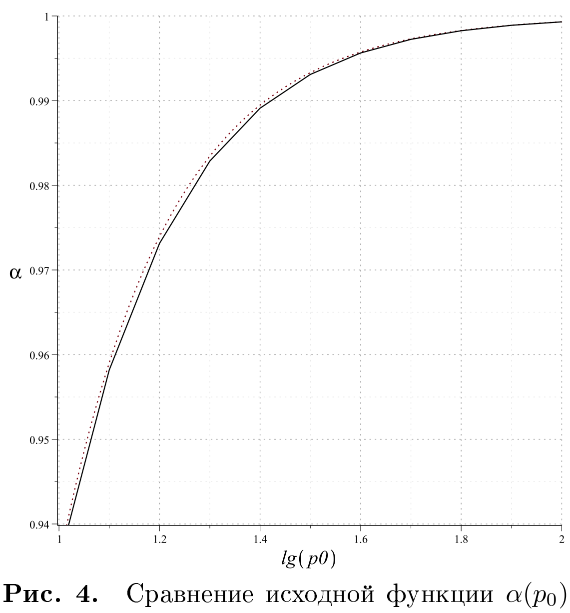

Рис. 4. Сравнение исходной функции $\alpha(p_0)$ и смоделированной функции.

Следовательно, функцию τ можно заменить функцией вида (См. Рис. 5):

$$\tau_m(p_0, x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{p_0^2}\right) F(\alpha, r), \tag{4.3}$$

где $\alpha = \arccos \frac{1-\operatorname{sh}(2x)}{1+\operatorname{sh}(2x)}$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F(\alpha, r)$- эллиптический интеграл первого рода. Погрешность смоделированной функции τ_m относительно функции τ для $p_0 = 10$ не превышает 6.5%, для $p_0 = 100$ меньше 0,1% (См. Рис. 6).

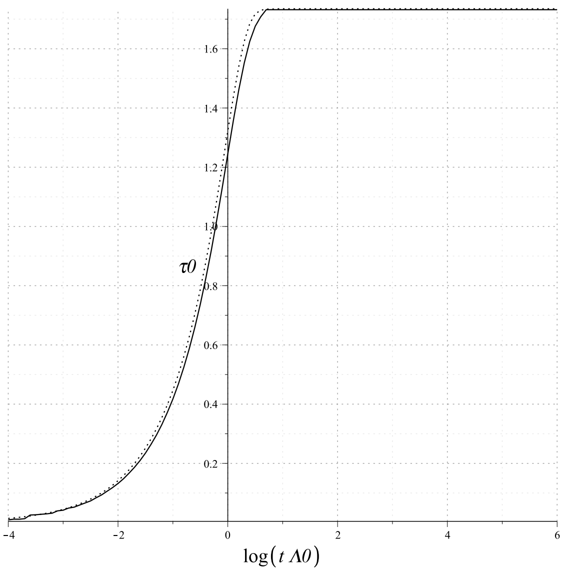

Рис. 5. Сравнение функций $\tau(t)$ и $\tau_m(t)$.

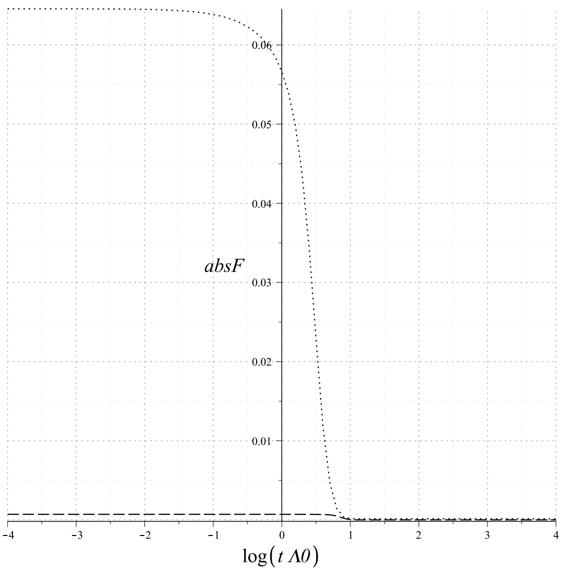

Рис. 6. Погрешность смоделированной функции τ_m.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Известия ВУЗов, Физика. 1986. Т. 29. № 2. С. 27—32.
2. Игнатьев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга // Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной: сб. статей. КГПУ. Казань, 1988. С. 62–84.
3. Ignat'ev Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition // Gravitation & Cosmology. 2007. Т. 13. № 1. P. 31–42.
4. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Kinetics of the nonequilibrium Universe. II. Kinetics of Local thermodynamic equilibrium recovery // Gravitation & Cosmology. 2007. Т. 13. № 2. P. 101–113.
5. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. № 1. С. 79–98.
6. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. II. Модель энергобаланса // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 1. С. 79–98.
7. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиантъ, 2010. 506 с. URL: `http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf`
8. Игнатьев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский университет, 2013. 316 с. URL: `http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf`
9. Пилькун Х. Физика релятивистских частиц. М.: Мир, 1983. 542 с.
10. Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения и космология // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. 1980. Вып. 11. С. 113–125.
11. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика и космология. I. // Известия ВУЗов, Физика. 1980. Т. 23. № 8. С. 42–47.
12. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования // Известия ВУЗов, Физика. 1982. Т. 25. № 3. С. 92–96.
13. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. III. Модель энергобаланса для инфляционной стадии // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 2. С. 5–10.

14. Ignatyev Yu.G. Establishment of thermodynamic equilibrium in a cosmological model with arbitrary acceleration // Gravitation & Cosmology. 2013. Vol. 19. № 4. P. 232—239.

15. Ignat'ev Yu.G. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe // Russian Physics Journal. 2013. Vol. 56. № 6. P. 693–706.

16. Ignatyev Yu.G. Numerical simulation of thermodynamic equilibrium establishment in a cosmological model with arbitrary acceleration // Gravitation & Cosmology. 2014. Vol. 20. № 1. P. 99–105.

17. Ignat'ev Yu.G. Numerical models of the process of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerated Universe // Russian Physics Journal. 2014. Vol. 57. № 1. P. 28–34.

18. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe // Gravitation & Cosmology. 2006. Vol. 12. № 4 (48). P. 1–12.

19. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe. II. Early stages // Gravitation & Cosmology. 2008. Vol. 14. № 4. P. 301–308.

20. Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле // Известия ВУЗов, Физика. 1983. Т. 26. № 8. С. 19–23.

21. Игнатьев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Релятивистская кинетика столкновительного затухания гравитационных волн в горячей Вселенной // Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной: сб. статей. КГПУ. Казань, 1988. С. 84–97.

22. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ. 1937. № 7. С. 203–212.

23. Градштейн И.Ф., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1968. 1100 с.

24. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИФМЛ, 1963. 360 с.

25. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.

26. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 320 с.

27. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике: Учебн. пособие. М.:Изд-во МГУ, 1998. 350 с.

Поступила в редакцию 17.10.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Кох Ирина Александровна, аспирант, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: irina_kokh@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev, I. A. Kokh

Diffuzion model of the cosmlogical evolution of ultrahigh-energy particles in the scaling conditions at unitary limit

Keywords: Relativistic Kinetics, Diffuzion, Ultrahigh energies, Scaling.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny

The rigorous formulation of the problem of the cosmological evolution suprathermal particles with energies above the unitary limit in the universe described by the accurate model of transition from stage ultra-inflationary expansion is present. On the basis of a mathematical model formulated asymptotic estimation dynamic range of high-energy particles, built and studied numerical model of cosmological evolution of such particles at the inflationary stage of expansion of the universe. It is shown that a number of parameters of the spectrum of particles are fixed on the inflationary stage.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. A possibility of a violation of a thermodynamic equilibrium in the early Universe, *Soviet Physics Journal*, 1986, vol. 29, no. 2, pp. 104–108.

2. Ignat'ev Yu.G. Cosmological implications of scaling, *Problemyi teorii gravitatsii, relyativistskoy kinetiki i evolyutsii Vselennoy: sbornik statey* (Problems theory of gravitation, relativistic kinetics and evolution of the Universe: Transactions), Kazan State Pedagogical University, Kazan, 1988, pp. 62–84.

3. Ignat'ev Yu.G. Kinetics of the non-equilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition, *Gravitation and Cosmology*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 31–42.

4. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Kinetics of the non-equilibrium Universe. II. Kinetics of Local thermodynamic equilibrium recovery, *Gravitation and Cosmology*, 2007, vol. 13, no. 2, pp. 101–113.

5. Ignat'ev Yu.G. Non-equilibrium kinetic model of the Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition, *Space, time and fundamental interactions*, 2012, no. 1, pp. 79–98.

6. Ignat'ev Yu.G. Non-equilibrium kinetic model of the Universe. II. Energy balance mode, *Space, time and fundamental interactions*, 2013, no. 1, pp. 79–98.

7. Ignat'ev Yu.G. *Relyativistskaya kineticheskaya teoriya neravnovesnyih protsessov v gravitatsionnyih polyah* (The relativistic kinetic theory of nonequilibrium processes in gravitational fields), Kazan: Foliant, 2010, 506 p. `http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf`

8. Ignat'ev Yu.G. *Neravnovesnaya Vselennaya: kineticheskie modeli kosmologicheskoy evolyutsii* (Nonequilibrium Universe: kinetic model of cosmological evolution), Kazan: Kazan University, 2013, 316 p. `http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf`

9. Pilkuhn H.M. *Relativistic particle physics*, New York: Springer-Verlag, 1979. Translater under the title *Fizika relyativistskih chastits*, Moscow: Mir, 1983, 542 p.

10. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations and cosmology, *Problemyi teorii gravitatsii i elementarnyih chastits*, 1980, no. 11, pp. 113–125.

11. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetics and cosmology. I, *Soviet Physics Journal*, 1980, vol. 23, no. 8, pp. 682–687.

12. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations, *Soviet Physics Journal*, 1982, vol. 25, no. 3, pp. 372–375.

13. Ignat'ev Yu.G. Non-equilibrium kinetic model of the Universe. III. Energy balance model for the inflation stage, *Space, time and fundamental interactions*, 2013, no. 2, pp. 5–10.

14. Ignat'ev Yu.G. Establishment of thermodynamic equilibrium in a cosmological model with arbitrary acceleration, *Gravitation and Cosmology*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 232—239.

15. Ignat'ev Yu.G. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe, *Russian Physics Journal*, 2013, vol. 56, no. 6, pp. 693–706.

16. Ignat'ev Yu.G. Numerical simulation of thermodynamic equilibrium establishment in a cosmological model with arbitrary acceleration, *Gravitation and Cosmology*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 99—105.

17. Ignat'ev Yu.G. Numerical models of the process of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerated Universe, *Russian Physics Journal*, 2014, vol. 57, no. 1, pp. 28–34.

18. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe, *Gravitation and Cosmology*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 1–12.

19. Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe. II. Early stages, *Gravitation and Cosmology*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 301—308.

20. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field, *Soviet Physics Journal*, 1983, vol. 26, no. 8, pp. 690–694.

21. Ignat'ev Yu.G., Shulikovsky V.Yu. Relativistic kinetics of collisional damping of gravitational waves in a hot Universe, *Gravitation and Cosmology*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 321–327.

22. Landau L.D. Kinetic equation in the case of Coulomb interaction, *Zh. eksperiment. i teoretich. fiziki*, 1937, no. 7, pp. 203–212.

23. Gradshteyn I.F., Ryzhik J.M. *Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* (Table of integrals, series, and products), Moscow: Fizmatgiz, 1968, 1100 p.

24. Lebedev N.N. *Spetsialnyie funktsii i ih prilozheniya* (Special functions and its applications), Moskow: Gos. izdat. fiz. mat. lit., 1963, 360 p.

25. Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1966, 444 p.

26. Evgrafov M.A. *Asimptoticheskie otsenki i tselyie funktsii* (Asymptotic estimate and integer function), Moscow: Nauka, 1979, 320 p.

27. Bogolyubov N.N., Kravtsov V.V. *Zadachi po matematicheskoy fizike* (Problems in mathematical physics), Moscow: Mosk. gos. univer., 1998, 350 p.

Received 17.10.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya St., 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Kokh Irina Alexandrovna, Postgraduate Student, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya St., 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: irina_kokh@rambler.ru