

К столетию общей теории относительности



УДК 530.1: 539.112

В. Г. Багров,¹ В. А. Бордовицын,² А. В. Куликова³

ПРОБЛЕМА КОВАРИАНТНОСТИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ⁴

В настоящее время классическая электродинамика представляет собой хорошо разработанный и очень важный в практическом отношении раздел современной физики, в основе которого лежит специальная теория относительности. Одним из наглядных примеров успешного применения методов классической электродинамики является теория релятивистского и, в частности, синхротронного излучения заряженных частиц, которое широко используется в самых разнообразных экспериментальных и технологических устройствах. Однако в технике вычислений высоко развитый математический аппарат классической электродинамики используется не всегда, и это иногда приводит к значительному усложнению расчётов конкретных физических эффектов. Например, при вычислении интегральных характеристик излучения произвольно движущихся релятивистских частиц применение ковариантного математического аппарата специальной теории относительности позволяет намного проще получить те же самые результаты для полной мощности излучения, которые даёт стандартный трёхмерный формализм. В данной работе показаны преимущества использования ковариантных методов интегрирования углового распределения в теории релятивистского излучения, и в связи с этим обсуждаются некоторые интегральные эффекты электромагнитных взаимодействий, такие как электромагнитная масса и аномальный магнитный момент электрона.

Ключевые слова: релятивистское излучение, ковариантное интегрирование, мощность излучения, электромагнитная масса, аномальный магнитный момент электрона.

PACS: 41.20.-q, 41.60.Ap, 03.65.Ca

Введение

Теория релятивистского излучения является одной из самых востребованных в настоящее время физических теорий [1, 2]. Об этом говорят многочисленные применения этой теории в экспериментах с поляризованными пучками элементарных частиц в физике высоких энергий, в спектроскопии твёрдого тела, в наблюдении развития химических реакций, в исследовании структуры молекул ДНК, в экологии при анализе атмосферных аэрозолей, почвы и воды, наконец, в создании новых прогрессивных технологий макроэлектроники, микромеханики, конструировании новых композитных материалов и так далее.

Основы теории релятивистского излучения и, в частности, синхротронного излучения были разработаны во многом благодаря работам российских физиков-теоретиков — В. В. Владимирского, Д. Д. Иваненко, А. А. Соколова, И. М. Тернова и других учёных из научной школы Московского и Томского государственных университетов [3, 4]. Следует отметить также работы ряда выдающихся зарубежных физиков, таких как Г. А. Шотт, Ю. Швингер и других.

В настоящее время основные свойства релятивистского излучения хорошо известны и находятся в прекрасном согласии с экспериментом. Тем не менее, отдельные элементы этой теории могут быть ещё усовершенствованы, например, с использованием более строгой атрибутики специальной теории относительности, которая лежит в основе теории релятивистского излучения.

¹ E-mail: bagrov@phys.tsu.ru

² E-mail: vabord@sibmail.com

³ E-mail: anasta-kulikova@yandex.ru

⁴ Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ № 15-02-00293а

В данной работе показано, в частности, что применение ковариантных методов теории релятивистского излучения позволяет значительно упростить интегрирование углового распределения излучения произвольно движущихся релятивистских заряженных частиц, что позволяет более глубоко и просто проанализировать происхождение электромагнитной массы и силы радиационного трения, а также понять причину появления аномального магнитного момента электрона в рамках чисто классической теории излучения.

Разумеется, в данном направлении вели исследования и другие авторы, включая известные работы Х. Д. Баба [5], П. Калдиrola [6, 7], К. Тейтельбойма [8] и других [9–11]. Мы надеемся, что представленные здесь оригинальные результаты окажутся также полезными и интересными.

1. Полевая динамика заряженной частицы с учётом внешних полей и полей, создаваемых произвольно движущимся релятивистским зарядом

Известно, что в теории поля четырёхмерный вектор плотности силы, действующей на заряженную точечную частицу, определяется соотношением

$$\mathcal{F}_e^\mu(\xi^\rho) = m_0 c \int d\tau w^\mu(\tau) \delta[\xi^\rho - r^\rho(\tau)]. \quad (1.1)$$

Здесь четырёхмерный вектор $\xi^\rho = (ct, \boldsymbol{\xi})$ описывает произвольную мировую точку вблизи от радиус-вектора заряженной частицы $r^\rho(\tau)$, которая движется с четырёхмерной скоростью $v^\mu(\tau)$ и ускорением $w^\mu(\tau)$. Из этого определения следует, что импульс частицы связан с плотностью силы соотношением

$$P_e^\mu(\tau) = \frac{1}{c} \int \mathcal{F}_e^\mu(\xi^\rho) d\Upsilon = m_0 v^\mu(\tau), \quad (1.2)$$

где $d\Upsilon = d^4\xi^\rho$ — элемент четырёхмерного объёма.

Используя стандартное определение силы Лоренца

$$F_e^\mu = \frac{e}{c} H_{ext}^{\mu\nu} v_\nu(\tau) = m_0 w^\mu(\tau) \quad (1.3)$$

и четырёхмерного вектора плотности тока

$$j_e^\mu(\xi^\rho) = ec \int d\tau v^\mu(\tau) \delta[\xi^\rho - r^\rho(\tau)], \quad (1.4)$$

выражение для плотности силы (1.1) можно представить в виде

$$\mathcal{F}_e^\mu(\xi^\rho) = \frac{1}{c} H_{ext}^{\mu\nu} j_{\nu e}(\xi^\rho) = \left(\frac{1}{c} (\mathbf{jE}_{ext}), \rho\mathbf{E}_{ext} + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}_{ext}] \right). \quad (1.5)$$

Интересно, что эти формулы можно получить так же, используя уравнения Максвелла

$$\partial_\nu H_{ext}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_e^\mu \quad (1.6)$$

и тензор плотности энергии-импульса заряженной частицы

$$\mathcal{E}_e^{\mu\nu}(\xi^\rho) = m_0 c \int v^\mu(\tau) v^\nu(\tau) \delta[\xi^\rho - r^\rho(\tau)] d\tau, \quad (1.7)$$

при этом

$$\mathcal{F}_e^\mu = \partial_\nu \mathcal{E}_e^{\mu\nu} = -\partial_\nu \mathcal{E}_{ext}^{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

где повсюду $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}$, а тензор плотности энергии-импульса внешнего поля определяется как обычно

$$\mathcal{E}_{ext}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(H^{\mu\nu} H_\nu{}^\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, мы приходим к дифференциальному закону сохранения тензора плотности энергии–импульса

$$\partial_\nu \mathcal{E}_e^{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{E}_{ext}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

В более общем случае с учётом самодействия электромагнитных полей, излучаемых самим зарядом, будем иметь

$$\partial_\nu \mathcal{E}_e^{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{E}_{ext}^{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{E}_{self}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.11)$$

Характер производной ∂_ν ещё нуждается в уточнении (см. ниже).

Сам тензор $\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu}$ состоит из трёх слагаемых:

$$\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu} = \bar{\mathcal{E}}^{\mu\nu} + \tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} + \tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

которые соответствуют тензору плотности энергии–импульса конвективных полей, создаваемых вблизи заряда ($\sim 1/\tilde{r}^4$):

$$\bar{\mathcal{E}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^2 c^4}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^6} \left\{ c^2 \tilde{r}^\mu \tilde{r}^\nu + \tilde{r}_\rho v^\rho (\tilde{r}^\mu v^\nu + \tilde{r}^\nu v^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\tilde{r}_\rho v^\rho)^2 \right\}, \quad (1.13)$$

тензору плотности энергии–импульса смешанных полей, создаваемых в ближней и дальней зонах излучения ($\sim 1/\tilde{r}^3$):

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^2 c^2}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^3} \left\{ \frac{\tilde{r}_\rho w^\rho (\tilde{r}^\mu v^\nu + \tilde{r}^\nu v^\mu)}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^2} + \frac{2c^2 \tilde{r}_\rho w^\rho \tilde{r}^\mu \tilde{r}^\nu}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^3} - \frac{\tilde{r}^\mu w^\nu + \tilde{r}^\nu w^\mu}{\tilde{r}_\rho v^\rho} \right\}, \quad (1.14)$$

и тензору плотности энергии–импульса электромагнитного излучения в дальней зоне ($\sim 1/\tilde{r}^3$):

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^2} \left\{ \frac{c^2 (\tilde{r}_\rho w^\rho)^2}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^4} - \frac{w_\rho w^\rho}{(\tilde{r}_\rho v^\rho)^2} \right\} \tilde{r}^\mu \tilde{r}^\nu. \quad (1.15)$$

Здесь повсюду $\tilde{r}^\mu = (\tilde{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ – светоподобный четырёхмерный радиус–вектор, проведённый из мировой точки заряда в точку наблюдения.

Однако вернёмся к интерпретации третьего члена в дифференциальном законе сохранения тензора энергии–импульса (1.11).

2. Проблема запаздывания излучения в точке наблюдения

Специфика полей, издаваемых зарядом в $\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu}$, состоит в том, что они определяются в запаздывающий момент времени

$$\tilde{t} = t + \frac{\tilde{r}}{c}. \quad (2.1)$$

Однако во всех членах формулы (1.11) ковариантное дифференцирование, очевидно, должно выполняться в один и тот же момент траекторного времени $t(\tau)$. В связи с этим проблема дифференцирования плотности энергии–импульса $\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu}$ в (1.11) нуждается в переопределении.

Этот вопрос мы рассмотрим на примере импульса электромагнитных полей, излучаемых произвольно движущейся заряженной релятивистской частицей. Согласно формулам (1.2) и (1.9) для чистого излучения будем иметь:

$$P_{self}^\mu = \frac{1}{c} \int \mathcal{F}_{self}^\mu(\xi^\rho) d\Upsilon = \frac{1}{c} \int \partial_\nu \mathcal{E}_{self}^{\mu\nu}(\tilde{t}) d\Upsilon, \quad (2.2)$$

причём элемент объёма $d\Upsilon$ здесь берётся в окрестности точки наблюдения. Характер зависимости $\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu}(\tilde{t})$ существенным образом проявляется при интегрировании по четырёхмерному объёму с применением теоремы Остроградского–Гаусса. Поэтому в подинтегральном выражении (2.2) эта зависимость должна учитываться в явном виде.

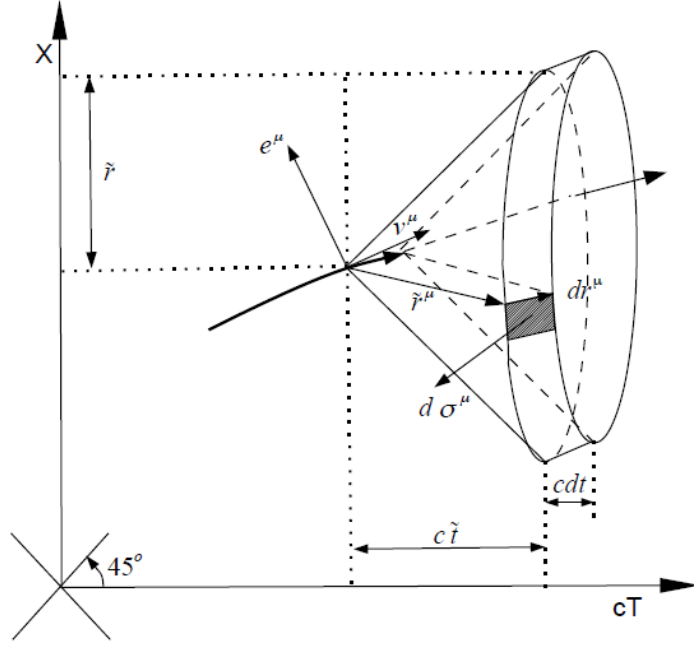


Рис. 1. Область интегрирования по пространственно-подобной гиперповерхности в виде гиперполоски

Так как всё излучение, испускаемое заряженной частицей за время $d\tau$, распространяется только внутри двух близко расположенных световых конусов (см. рис.1), то согласно теореме Остроградского-Гаусса, всё объёмное интегрирование сводится к одному поверхностному по окаймляющей световой конус гиперполоске с элементом поверхности $d\sigma^\alpha$. В результате с применением теоремы Остроградского-Гаусса в четырёхмерном пространстве полный импульс излучения для всех полей, создаваемых зарядом, согласно (2.2), будет равен

$$P_{self}^\mu(\tilde{t}) = \frac{1}{c} \int \mathcal{E}_{self}^{\mu\alpha}(\tilde{t}) d\sigma_\alpha. \quad (2.3)$$

Таким образом, определение поверхности $d\sigma_\alpha$ является важнейшей задачей для всех дальнейших расчётов. С этой целью четырёхмерный объём $d\Upsilon$, который, как известно, является инвариантной величиной, представим в виде

$$d\Upsilon = d\sigma_\alpha dR^\alpha. \quad (2.4)$$

Здесь четырёхмерный радиус-вектор

$$R^\alpha = r^\alpha + \tilde{r}^\alpha \quad (2.5)$$

в общем случае соответствует мировой точке наблюдения с учётом движения заряда. С другой стороны, в системе покоя частицы элемент четырёхмерного объёма

$$d\Upsilon_0 = \varepsilon^2 d\varepsilon d\Omega_0 c d\tau = d\Upsilon, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon = \tilde{r}_0$ — расстояние от заряда до наблюдателя в системе покоя с телесным углом $d\Omega_0$. Поскольку телесный угол $d\Omega_0$ преобразуется как

$$d\Omega_0 = \frac{d\Omega}{\gamma^2 [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]}, \quad (2.7)$$

а ε как нулевая компонента светоподобного вектора $\tilde{r}^\mu = (\tilde{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ в системе покоя преобразуется как

$$\varepsilon = \tilde{r}\gamma [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})] = -\frac{1}{c} \tilde{r}_\lambda v^\lambda, \quad (2.8)$$

то

$$\varepsilon^2 d\Omega_0 = \tilde{r}^2 d\Omega = inv. \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что, согласно (2.6), всё запаздывание во времени, связанное с излучением в элементе объёма $d\Upsilon$, сводится к величине $d\varepsilon(\tilde{t})$, которую с помощью известных правил дифференцирования функций с запаздыванием аргумента можно определить как

$$d\varepsilon|_{\tilde{t}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{r}_\alpha} \Big|_{\tilde{t}} dR_\alpha, \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \Big|_{\tilde{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_\alpha} + \frac{\tilde{r}^\alpha}{\tilde{r}_\rho v^\rho} \frac{d}{d\tau} \right) \Big|_{\tilde{t}}. \quad (2.11)$$

Кроме того, так как, согласно (2.5),

$$dR_\alpha = \left(v^\alpha + \frac{1}{c} \varepsilon e_\lambda w^\lambda k_\alpha \right) d\tau + k_\alpha d\varepsilon, \quad (2.12)$$

где

$$e^\mu = k^\mu - \frac{v^\mu}{c}, \quad e_\mu v^\mu = 0, \quad e_\mu e^\mu = 1 \quad (2.13)$$

— пространственноподобный единичный вектор Рорлиха [12], а

$$k^\mu = \frac{\tilde{r}^\mu}{\varepsilon} = -\frac{\tilde{r}^\mu}{\tilde{r}_\rho v^\rho}, \quad k^\mu k_\mu = 0 \quad (2.14)$$

— светоподобный четырёхмерный вектор, находим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{r}_\alpha} \Big|_{\tilde{t}} = e^\alpha \left(1 + \frac{1}{c^2} \varepsilon e_\lambda w^\lambda \right) + \frac{\varepsilon}{c^3} v^\alpha e_\lambda w^\lambda. \quad (2.15)$$

Для проверки этого выражения можно убедиться, что с учётом (2.12) соотношение (2.10) тождественно выполняется. Наконец, согласно условию инвариантности элемента четырёхмерного объёма $d\Upsilon = d\Upsilon_0$ на основе определений (2.4) и (2.6), а также принимая во внимание (2.10), (2.12) и (2.15), получаем

$$d\sigma^\alpha = \varepsilon^2 \left(e^\alpha + \frac{\varepsilon}{c^2} k_\rho w^\rho k^\alpha \right) d\Omega_0 c d\tau. \quad (2.16)$$

Этот элемент гиперповерхности в теории излучения хорошо известен в литературе. Он лежит в основе всех дальнейших ковариантных выражений в теории релятивистского излучения.

3. Угловое распределение мгновенной мощности релятивистского излучения

Импульсные характеристики углового распределения релятивистского излучения можно получить с помощью (2.3), если туда подставить элемент гиперповерхности (2.16). Тогда получим

$$P_{self}^\mu = \oint \mathcal{E}_{self}^{\mu\nu} \left(e_\nu + \frac{\varepsilon}{c^2} k_\rho w^\rho k_\nu \right) \tilde{r}^2 d\Omega c d\tau. \quad (3.1)$$

Поскольку расстояние от заряда до точки наблюдения \tilde{r} от углов не зависит, то мощность четырёхмерного импульса углового распределения произвольно движущегося релятивистского заряда в единицу собственного времени примет вид

$$\frac{dP_{self}^\mu}{d\tau} = \tilde{r}^2 \oint \mathcal{E}_{self}^{\mu\nu} \left(e_\nu - \frac{\varepsilon}{c^2} k_\rho w^\rho k_\nu \right) d\Omega. \quad (3.2)$$

Если рассматривать далее только чистое излучение в волновой зоне

$$\mathcal{E}_{self}^{\mu\nu} = \tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

то согласно (1.15), имеют место соотношения

$$\tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} \tilde{r}_\nu = \tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} k_\nu = 0. \quad (3.4)$$

В результате мы получаем

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} = \tilde{r}^2 \oint \tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu} e_\nu d\Omega. \quad (3.5)$$

Подставляя сюда $\tilde{\mathcal{E}}^{\mu\nu}$ из (1.15), для излучения в чистом виде будем иметь

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} = \frac{e^2}{4\pi c^2} \oint \frac{w_\rho w^\rho - (e_\rho w^\rho)^2}{(n_\rho v^\rho)^2} \left(e^\mu + \frac{v^\mu}{c} \right) d\Omega. \quad (3.6)$$

Здесь мы ввели совокупность четырёх светоподобных величин

$$n^\rho = \frac{\tilde{r}^\rho}{\tilde{r}} = (1, \mathbf{n}). \quad (3.7)$$

При $\mu = 0$ из выражения (3.6) с учётом запаздывания излучения

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = -\frac{n_\rho v^\rho}{c\gamma} = 1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) \quad (3.8)$$

получим мощность мгновенного излучения

$$W = \frac{c\tilde{r}^2}{\gamma} \int \tilde{\mathcal{E}}^{0\nu} e_\nu d\Omega = \frac{c}{4\pi} \int \tilde{\mathbf{E}}^2 [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})] d\Omega, \quad (3.9)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ — напряжённость электрического поля излучения, которая определяется компонентами (1.9).

Заметим, что эта величина определена как потери энергии заряда на излучение в единицу траекторного времени t . Если же в (3.9) для измерения этого излучения использовать время наблюдателя \tilde{t} , то поскольку

$$\frac{d}{dt} = [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})] \frac{d}{d\tilde{t}}, \quad (3.10)$$

соответствующая интенсивность излучения будет определяться как

$$I = \frac{c}{4\pi} \oint \tilde{\mathbf{E}}^2 d\Omega. \quad (3.11)$$

Это выражение более удобно для спектрального анализа излучения, в котором время \tilde{t} является немой переменной, более подробное обсуждение этих вопросов и связанных с ними проблем можно найти в работах [13–15].

В явном виде, согласно (3.6) и с учётом соотношений (2.13) и (3.7), угловое распределение импульса излучения в единицу собственного времени можно представить в виде

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} = \frac{e^2}{4\pi c^4} \oint \frac{\gamma n^\mu}{[1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]^5} \left\{ a^2 [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]^2 - (\mathbf{n}\mathbf{a})^2 (1 - \beta^2) + 2(\mathbf{n}\mathbf{a})(\boldsymbol{\beta}\mathbf{a}) [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})] \right\} d\Omega, \quad (3.12)$$

где \mathbf{a} — трёхмерное ускорение заряженной частицы. При $\mu = 0$ отсюда в явном виде следует выражение для углового распределения мощности

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{a^2 [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]^2 - (\mathbf{n}\mathbf{a})^2 (1 - \beta^2) + 2(\mathbf{n}\mathbf{a})(\boldsymbol{\beta}\mathbf{a}) [1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]}{[1 - (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})]^5}. \quad (3.13)$$

Всестороннее исследование этого выражения, а также свойства линейной поляризации излучения произвольно движущегося заряда были проделаны в работе [16].

Чтобы получить полную мощность излучения, надо проинтегрировать выражение (3.13) по углам сферической системы координат, в которой

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sin\theta d\theta d\varphi, \quad \mathbf{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) = \beta \sin\theta, \\ (\mathbf{n}\mathbf{a}) &= a(\sin\theta \cos\varphi \sin\alpha + \cos\theta \cos\alpha), \quad (\boldsymbol{\beta}\mathbf{a}) = \beta a \cos\alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

После простых, но довольно трудоёмких вычислений угловых интегралов приходим к выражению (см. также [1])

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (a^2 - [\beta \mathbf{a}]^2) \gamma^6. \quad (3.15)$$

4. Техника ковариантного интегрирования углового распределения излучения

Те же результаты, но физически и математически более изящным методом можно получить с применением ковариантного интегрирования углового распределения релятивистского излучения. Отправной точкой здесь являются простые инвариантные угловые интегралы. Например,

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint \frac{d\Omega}{(n_\rho v^\rho)^2} = 1, \quad (4.1)$$

значение которого фактически является следствием инвариантности соотношения (2.7) для телесного угла

$$d\Omega = \frac{1}{c^2} (n_\rho v^\rho)^2 d\bar{\Omega}_0. \quad (4.2)$$

Более сложный интеграл при наличии в подинтегральном выражении вектора Рорлиха (2.13) будет иметь один единственно возможный вариант ответа

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu}{(n_\rho v^\rho)^2} = C_1 v^\mu. \quad (4.3)$$

Постоянную C_1 можно определить из ковариантных соображений, умножив обе части (4.3) на четырёхмерный вектор скорости v^μ . Поскольку $v_\mu e^\mu = 0$ и $v_\mu v^\mu = -c^2$, то остаётся только принять $C_1 = 0$. Точно так же вычисляется угловой интеграл с двумя векторами e^μ , который можно представить в виде

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu}{(n_\rho v^\rho)^2} = C_0 g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} C_2 v^\mu v^\nu. \quad (4.4)$$

Можно определить постоянные коэффициенты C_0 и C_2 , домножив равенство (4.4) на множители $g_{\mu\nu}$ и $v_\mu v_\nu$, после чего появляются два простых уравнения

$$\begin{cases} 4C_0 - C_2 = 1, \\ C_0 - C_2 = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

из которых следует, что $C_0 = C_2 = 1/3$, и, стало быть, интеграл

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu}{(n_\rho v^\rho)^2} = \frac{1}{3} G^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Здесь мы ввели новое обозначение

$$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} v^\mu v^\nu. \quad (4.7)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы с большим числом множителей $e^\mu e^\nu e^\rho \dots$, однако при этом возникает проблема симметризации окончательного ответа по индексам μ, ν, ρ, \dots (для одного и двух множителей $e^\mu e^\nu$ такой проблемы вообще не существует). Но теперь в случае трёх множителей $e^\mu e^\nu e^\rho$ ответ следует записать в виде

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu e^\rho}{(n_\rho v^\rho)^2} = \frac{1}{c} C_1 (g^{\mu\nu} v^\rho + g^{\mu\rho} v^\nu + g^{\nu\rho} v^\mu) + \frac{1}{c^3} C_3 v^\mu v^\nu v^\rho, \quad (4.8)$$

а при четырёх $e^\mu e^\nu e^\rho e^\lambda$ — как

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu e^\rho e^\lambda}{(n_\rho v^\rho)^2} &= C_0 (g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) + \\ &+ \frac{1}{c^2} C_2 (g^{\mu\nu} v^\rho v^\lambda + g^{\mu\rho} v^\nu v^\lambda + g^{\mu\lambda} v^\nu v^\rho + g^{\nu\lambda} v^\mu v^\rho + g^{\rho\lambda} v^\mu v^\nu) + \frac{1}{c^4} C_4 v^\mu v^\nu v^\rho v^\lambda. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для определения постоянных коэффициентов C_1, C_3 и C_0, C_2, C_4 эти интегралы следует домножить соответственно на множители $v_\mu g_{\nu\rho}, v_\mu v_\nu v_\rho$ и $g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}, g_{\mu\nu} v_\rho v_\lambda, v_\mu v_\nu v_\rho v_\lambda$. Тогда получим две системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} 6C_1 - C_3 = 0, \\ 3C_1 - C_3 = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

и

$$\begin{cases} 24C_0 - 12C_2 + C_4 = 1, \\ -6C_0 + 9C_2 - C_4 = 0, \\ 3C_0 - 6C_2 + C_4 = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Решением этих уравнений является $C_1 = C_3 = 0$ и $C_0 = C_2 = 1/15$, $C_4 = 1/5$. Таким образом, интеграл с нечётным числом векторов Рорлиха снова равен нулю, а с четырьмя — представляется в виде

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu e^\rho e^\lambda}{(n_\rho v^\rho)^2} = \frac{1}{15} G^{(\mu\nu} G^{\rho\lambda)}. \quad (4.12)$$

Здесь $G^{\mu\nu}$ определяется соотношением (4.7), а круглые скобки означают симметризацию по всем индексам

$$G^{(\mu\nu} G^{\rho\lambda)} = G^{\mu\nu} G^{\rho\lambda} + G^{\mu\rho} G^{\nu\lambda} + G^{\mu\lambda} G^{\nu\rho}. \quad (4.13)$$

Дальнейшие расчёты показывают, что все интегралы с нечётным числом векторов Рорлиха всегда обращаются в нуль, а с чётным — принимают простой и красивый вид, например,

$$\frac{c^2}{4\pi} \oint d\Omega \frac{e^\mu e^\nu e^\rho e^\lambda e^\sigma e^\eta}{(n_\rho v^\rho)^2} = \frac{1}{105} G^{(\mu\nu} G^{\rho\lambda} G^{\sigma\eta)}. \quad (4.14)$$

Разработанная здесь техника ковариантного интегрирования углового распределения релятивистского излучения применяется не только для изучения произвольно движущегося заряда, но и более сложных источников излучения, например, таких как собственный магнитный момент электрона [17].

С применением к излучению заряда согласно определению мощности импульса (3.6) и с учётом известных формул (4.2) и (4.6) получаем

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^5} w_\rho w^\rho v^\mu, \quad (4.15)$$

откуда при $\mu = 0$ сразу следует уже известная формула (3.15) для мощности излучения в единицу собственного времени

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w_\rho w^\rho = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (a^2 - [\boldsymbol{\beta}\mathbf{a}]^2) \gamma^6. \quad (4.16)$$

5. Излучение в ближней зоне, сила радиационного трения и аномальный магнитный момент электрона

Формула для мощности импульса чистого излучения (4.15), как и должно быть, не зависит от расстояния между зарядом и наблюдателем. Однако, если мы хотим учесть влияние электромагнитных полей, излучаемых зарядом, на динамику его движения, то надо перейти к рассмотрению

этих полей в непосредственной близости от заряда, где существенным становится не столько влияние поля излучения, входящего в тензор $\tilde{E}^{\mu\nu} (\sim 1/\tilde{r}^2)$, сколько влияние конвективных полей в $\tilde{E}^{\mu\nu} (\sim 1/\tilde{r}^4)$, а также смешанных полей, образующих тензор $\tilde{\tilde{E}}^{\mu\nu} (\sim 1/\tilde{r}^3)$.

Если на основе определений этих тензоров в (1.13)–(1.15) с применением техники ковариантного интегрирования угловых распределений к формуле (3.2) найти мощность соответствующих им импульсов в единицу собственного времени, то получим

$$\frac{d\bar{P}^\mu}{d\tau} = 0 - \frac{1}{6} \frac{e^2}{\varepsilon c^2} w^\mu, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\tilde{\tilde{P}}^\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\varepsilon c^2} w^\mu + 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} w_\alpha w^\alpha v^\mu + 0. \quad (5.3)$$

Порядок написания членов в правой части этих формул соответствует их очерёдности в определении элемента гиперповерхности $d\sigma_\alpha$ в (2.16). В динамике излучающего заряда все эти выражения следует брать с противоположным знаком (то, что заряд излучает, соответствует потерям энергии).

Таким образом, силу самодействия излучающего заряда можно определить в виде

$$F_{self}^\mu = - \left(\frac{d\bar{P}^\mu}{d\tau} + \frac{d\tilde{\tilde{P}}^\mu}{d\tau} + \frac{d\tilde{P}^\mu}{d\tau} \right) = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} \left(w_\alpha w^\alpha v^\mu + \frac{3}{4} \frac{c^3}{\varepsilon} w^\mu \right). \quad (5.4)$$

Однако при подстановке этого выражения в уравнение движения заряда во внешнем поле (1.3) следует учесть, что заряд «почувствует» влияние излучаемых им полей не сразу, а спустя лишь очень маленький промежуток времени $\Delta\tau$, равный по порядку величины времени отдаления электромагнитного поля от заряда ε/c , если в качестве ε принять классический радиус электрона (см. [18] и др.)

$$\varepsilon = \frac{e^2}{2\tilde{m}_0} c^2. \quad (5.5)$$

Здесь \tilde{m}_0 означает электромагнитную массу электрона, которая отличается от инертной (см. ниже).

Более того, величину $\Delta\tau$ можно определить из физических соображений. Действительно, наиболее существенно отставание силы самодействия проявляется во втором члене F_{self}^μ в (5.4). Поэтому именно здесь следует сделать замену

$$w^\mu \rightarrow w^\mu - \frac{dw^\mu}{d\tau} \Delta\tau. \quad (5.6)$$

Но так как для силы самодействия должно выполняться условие пространственно-подобия

$$v_\mu F_{self}^\mu = 0, \quad (5.7)$$

то с привлечением стандартных соотношений специальной теории относительности $v_\mu v^\mu = -c^2$, $v_\mu w^\mu = 0$ получаем

$$\Delta\tau = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{c} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\tilde{m}_0 c^2}. \quad (5.8)$$

В литературе эту величину называют также хрономом (см. [11, 19] и др.) или квантом времени.

Теперь выражение для F_{self}^μ примет вид

$$F_{self}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{dw^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2} w_\alpha w^\alpha v^\mu \right) - \frac{e^2}{2c^2\varepsilon} w^\mu. \quad (5.9)$$

Если эту силу объединить с силой Лоренца (1.3), то получившиеся при этом уравнения движения можно переписать в виде

$$\left(m_0 + \frac{e^2}{2\varepsilon c^2} \right) w^\mu = \frac{e}{c} H^{\mu\nu} v_\nu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{dw^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2} w_\alpha w^\alpha v^\mu \right). \quad (5.10)$$

В этой формуле к обычной традиционной массе заряда m_0 добавляется член с электромагнитной массой, которая появилась в (5.5)

$$\tilde{m}_0 = \frac{e^2}{2\varepsilon c^2}. \quad (5.11)$$

Эта величина существенно зависит от классического радиуса электрона, который совпадает с радиусом сферически симметричного электромагнитного поля, отделившегося от заряда.

Однако в наших рассуждениях отсутствует ещё один важный элемент событий, происходящих на микроскопическом уровне вблизи электрона — это индикатор масштаба наблюдаемых событий. Таким индикатором с учётом квантовых процессов является, как известно (см. например, [18]), комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_k = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}. \quad (5.12)$$

В связи с этим естественно принять значение ε с учётом (5.1) равным

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\lambda_k = \frac{\pi\hbar}{m_0 c} = \frac{e^2}{2\tilde{m}_0 c^2}. \quad (5.13)$$

Но тогда

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} m_0 = \frac{\alpha}{2\pi} m_0, \quad (5.14)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры.

Заметим, что такое значение электромагнитной массы электрона для слабых полей встречается и в более строгой квантовой электродинамике (см., например, [20]).

Таким образом, уравнение движения заряда (5.10) с учётом самодействия электромагнитных полей и при наличии внешнего поля принимает вид

$$m_0^* w^\mu = \frac{e}{c} H_{ext}^{\mu\nu} + F_{rad}^\mu, \quad (5.15)$$

где

$$m_0^* = m_0 + \tilde{m}_0 = m_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \quad (5.16)$$

— динамическая масса заряда, а

$$F_{rad}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{dw^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2} w_\alpha w^\alpha v^\mu \right) \quad (5.17)$$

— хорошо известная в литературе [1, 2] сила радиационного трения. Заметим также, что если m_0^* — это наблюдаемая масса электрона, то собственный магнитный момент электрона, или магнетон Бора, с учётом (5.16) будет равен

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c} = \frac{e\hbar}{2m_0^* c} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \tilde{\mu}_0 + \mu_a, \quad (5.18)$$

что означает, кроме наблюдаемого магнитного момента $\tilde{\mu}_0$, наличие ещё и аномального магнитного момента электрона, который в своё время был вычислен [21] и подробно обсуждался в квантовой теории [22–24].

Заключение

В данной работе мы показали, что ковариантные методы интегрирования углового распределения релятивистского излучения позволяют очень просто получить не только интегральные характеристики этого излучения, но и найти их естественную связь с уравнениями движения заряда. Сам этот факт имеет элементарное физическое объяснение, которое заключается в том, что ковариантные вычисления соответствуют структуре математического аппарата классической электродинамики, основанной на специальной теории относительности.

К сожалению, изначально ряд работ в этом направлении был выполнен в нековариантной форме, что привело к большой путанице в определении основных характеристик излучения и силы радиационного трения (более подробно об этом см. в [25, 26]). Заметим также, что физическая экзотика феномена силы радиационного трения неоднократно приводила к появлению ряда совершенно неординарных гипотез и предположений (см. [6, 7, 9–11, 27–32] и др.), которые до сих пор заслуживают тщательного изучения. В связи с этим простая и физически обоснованная постановка задачи об излучении произвольно движущейся релятивистской частицы приобретает особо важное значение.

Перечислим ещё раз основополагающие идеи предлагаемого здесь ковариантного метода вычислений в теории релятивистского излучения произвольно движущегося заряда.

1. Повсюду на всех этапах вычислений задействован ковариантный формализм специальной теории относительности в четырёхмерном пространстве Минковского.
2. При взаимодействии заряда с электромагнитным полем учитывается как внешнее поле, так и поля, создаваемые самим зарядом, включая конвективное поле вблизи от заряда, поле излучения в волновой зоне, а также смешанное поле, обусловленное интерференцией двух предыдущих полей.
3. В соответствии с принципом причинности при определении силы взаимодействия заряда с собственным электромагнитным полем учитывается запаздывание во времени полей, излучаемых зарядом.
4. Установлено, что движение заряда является следствием единого закона сохранения для тензоров плотности энергии–импульса всех электромагнитных полей, взаимодействующих с зарядом, в дифференциальной форме.
5. Уравнения движения заряда с учетом собственной электромагнитной массы и силы радиационного трения могут рассматриваться как следствие применения теоремы Остроградского–Гаусса в четырехмерном пространстве к закону сохранения суммы всех тензоров плотности энергии–импульса. Техника ковариантного интегрирования угловых распределений излучения произвольно движущегося заряда значительно упрощает процедуру получения этого результата.
6. Окончательный вид уравнений движения получается после приведения всех сил, действующих на заряд, к одной мировой точке, где в данный момент собственного времени находится этот заряд.
7. После получения уравнений движения с учётом силы радиационного трения электромагнитная масса произвольно движущегося заряда получает наглядную физическую интерпретацию, которая, как оказалось, связана с аномальным магнитным моментом электрона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багров В.Г., Бисноватый-Коган Г.С., Бордовицын В.А., Борисов А.В., Дорофеев О.Ф., Жуковский В.Ч., Пивоваров Ю.Л., Шорохов О.В., Эпп В. Я. Теория излучения релятивистских частиц. Под ред. Бордовицына В.А. М.: Физматлит, 2002. 575 с.
2. Bagrov V.G., Bisnovatyı – Kogan G.S., Bordovitsyn V.A., Borisov A.V., Dorofeev O.F., Epp V.Ya., Gushchina V.S., Zhukovsky V.Ch. Synchrotron Radiation Theory and Its Development. Ed. Bordovitsyn V.A. Singapore, New Jersey, London: World Scientific, 1999. 447 p.
3. Тернов И.М., Михайлин В.В. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. М.: Энергоатомиздат, 1986. 286 с.
4. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с.
5. Bhabha H.J. Classical theory of mesons // Proc. Roy. Soc. London. 1939. Vol. 172A. P. 384–409.
6. Caldirola P. A new model of classical electron // Suppl. Nuovo Cimento. 1956. Vol. 3. Ser. X. P. 297–343.
7. Caldirola P., Casati G., Prosperetti A. On the classical theory of the electron // Nuovo Cimento. 1978. Vol. 43A. №1. P. 127–142.
8. Teitelboim C., Villaroel D., Van Weert Ch.G. Classical electrodynamics of retarded fields and point particles // Rivista del Nuovo Cimento. 1980. Vol. 3. №9. P. 1–64.
9. Schwinger J. Electromagnetic mass revisited // Found. Phys. 1983. Vol. 13. № 3. P. 373–383.
10. Косяков Б.П. Об инертных свойствах частиц в классической теории // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. Вып. 6. С. 1563–1608.

11. Вяльцев А.Н. Дискретное пространство–время. М.: Наука, 1965. 399 с.
12. Rohrlich F. The definition of electromagnetic radiation // *Nuovo Cimento*. 1961. Vol. 21. № 5. P. 812–821.
13. Гинзбург В.Л., Сазонов В.Н., Сыроватский С.И. О магнитотормозном (синхротронном) излучении и его реабсорбции // *УФН*. 1968. Т. 94. Вып. 1. С. 63–90.
14. Соколов А.А., Тернов И.М., Багров В.Г. О радиационной поляризации спина электрона, движущегося по спирали в магнитном поле // *Проблемы гравитации. Труды V международной конференции по гравитации и теории относительности*. Тбилиси, 1978. С. 542–551.
15. Мычелкин Э.Г. Мощность и интенсивность излучения релятивистских частиц // *Изв. АН Каз. ССР Сер. физ.-мат.* 1968. № 4. С. 23–28.
16. Багров В.Г., Бордовицын В.А., Буленок В.Г., Куликова А.В. Кинематическая идентификация углового распределения мощности и линейной поляризации излучения произвольно движущегося заряда // *Изв. вузов. Физика*. 2015. Т. 58. № 2. С. 14–22.
17. Бордовицын В.А., Тернов И.М., Багров В.Г. Спиновый свет // *УФН*. 1995. Т. 165. № 9. С. 1089–1094.
18. Гальцов Д.В. Теоретическая физика для студентов–математиков. М.: Изд. Московского университета, 2003. 318 с.
19. MacGregor M.H. On the interpretation of the electron anomalous magnetic moment // *Found. Phys. Lett.* 1989. Vol. 2. № 6. P. 577–589.
20. Ритус В.И. Сдвиг массы электрона в интенсивном поле // *Труды ФИАН*. 1986. Т. 168. С. 52–119.
21. Schwinger J. On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron // *Phys. Rev.* 1948. Vol. 73. № 4. P. 416–417.
22. Тернов И.М., Багров В.Г., Бордовицын В.А., Дорофеев О.Ф. К вопросу об аномальном магнитном моменте электрона // *ЖЭТФ*. 1968. Т. 55. Вып. 6(12). С. 2273–2280.
23. Тернов И.М., Багров В.Г., Бордовицын В.А., Дорофеев О. Ф. Вакуумный магнитный момент электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле // *ДАН СССР*. 1968. Т. 183. № 4. С. 810–812.
24. Тернов И.М., Багров В.Г., Бордовицын В.А. О величине вакуумного магнитного момента электрона, движущегося в однородном магнитном поле // *Изв. вузов. Физика*. 1968. № 11. С. 17–22.
25. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: Наука, 1987. 487 с.
26. Бордовицын В.А., Поздеева Т.О. К обоснованию силы радиационного трения // *Изв. вузов. Физика*. 2006. № 6. С. 72–78.
27. Browne P.F. Electron spin and radiative reaction // *Ann. of Phys.* 1970. Vol. 89. P. 254–258.
28. Сермягин А.В. Новое классическое релятивистское уравнение движения заряда в электромагнитном поле // *Препринт ОИЯИ 32–11772*. 1978. Вып. 1. С. 7–14.
29. Barut A.O., Unal N. Generalisation of the Lorentz–Dirac equation to include spin // *Phys. Rev.* 1989. Vol. A40. P. 5404–5406.
30. Tse Chin Mo, Papas C.H. New equation of motion for classical charger particle // *Phys. Rev.* 1971. Vol. D4. P. 3566–3571.
31. Виленкин А.В., Фомин П.И. Принцип соответствия в задаче о собственной массе // *ЖЭТФ*. 1974. Т. 67. С. 12–16.
32. Luiz A.M. The electromagnetic mass paradox // *Nuovo Cimento*. 1969. № 9. P. 429–430.

Поступила в редакцию 10.03.2016

Багров Владислав Гаврилович, д. ф.-м. н., профессор, Томский государственный университет, физический факультет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36., Институт сильноточной электроники СО РАН, 634055, г. Томск, пр. Академический, 2/3
E-mail: bagrov@phys.tsu.ru

Бордовицын Владимир Александрович, д. ф.-м. н., профессор, Томский государственный университет, физический факультет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.
E-mail: vabord@sibmail.com

Куликова Анастасия Витальевна, магистрант, Томский государственный университет, физический факультет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.
E-mail: anasta-kulikova@yandex.ru

V. G. Bagrov, V. A. Bordovitsyn, A. V. Kulikova
Covariance problem in relativistic radiation theory

Keywords: relativistic radiation, covariant integration, radiation power, electromagnetic mass, electron anomalous magnetic moment.

PACS: 41.20.-q, 41.60.Ap, 03.65.Ca

Nowadays classical electrodynamics is a sufficiently developed and very important for practical implementation branch of modern physics based on special relativity. One of illustrative examples of successful application of methods of classical electrodynamics is theory of relativistic and particularly synchrotron radiation of charged particles, which is used in various experimental and technological devices. Nevertheless, advanced mathematical tool of classical electrodynamics is not always used in computing technique, and this fact sometimes causes significant complication of calculations of specific physical phenomena. For instance, when we calculate integral characteristics of radiation of arbitrarily moving relativistic particles, application of covariant mathematical apparatus of special relativity permits to obtain the same results for full radiation power, which conventional three-dimensional formalism produces, much easier. This work demonstrates benefits of use of covariant methods of angle distribution integration in relativistic radiation theory. In this connection, we discuss some integral effects of electromagnetic interaction such as electromagnetic mass and anomalous magnetic moment of an electron.

REFERENCES

1. Bagrov V.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Borodovitsyn V.A., Borisov A.V., Dorofeev O.F., Zhukovsky V. Ch., Pivovarov Yu.L., Shorohov O.V., Epp V. Ya. *Teoriya izlucheniya relyativistskikh chastits* (Radiation theory of relativistic particles). Ed. Bordovitsyn V.A., Moscow: Fizmatlit, 2002, 575 p.
2. Bagrov V.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Bordovitsyn V.A., Borisov A.V., Dorofeev O.F., Epp V.Ya., Gushchina V.S., Zhukovsky V.Ch. *Synchrotron Radiation Theory and Its Development*. Ed. Bordovitsyn V.A. Singapore, New Jersey, London: World Scientific, 1999, 447 p.
3. Ternov I.M., Mikhaylin V.V. *Sinkhrotronnoe izluchenie. Teoriya i eksperiment* (Synchrotron radiation. Theory and experiment), Moscow: Energoatomizdat, 1986, 286 p.
4. Sokolov A.A., Ternov I.M. *Relyativistskiy elektron* (Relativistic electron), Moscow: Nauka, 1983, 304 p.
5. Bhabha H.J. Classical theory of mesons, *Proc. Roy. Soc. London*, 1939, vol. 172A, pp. 384–409.
6. Caldirola P. A new model of classical electron, *Suppl. Nuovo Cimento*, 1956, vol. 3, ser. X, pp. 297–343.
7. Caldirola P., Casati G., Prosperetti A. On the classical theory of the electron, *Nuovo Cimento*, 1978, vol. 43A, no. 1, pp. 127–142.
8. Teitelboim C., Villaroel D., Van Weert Ch.G. Classical electrodynamics of retarded fields and point particles, *Rivista del Nuovo Cimento*, 1980, vol. 3, no. 9, pp. 1–64.
9. Schwinger J. Electromagnetic mass revisited, *Found. Phys.*, 1983, vol. 13, no. 3, pp. 373–383.
10. Kosyakov B.P. On the inert properties of particles in the classical theory, *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra*, 2003, vol. 34, no. 6, pp. 1563–1608.
11. Vyal'tsev A.N. *Diskretnoe prostranstvo-vremya* (Discrete space-time), Moscow: Nauka, 1965, 399 p.
12. Rohrlich F. The definition of electromagnetic radiation, *Nuovo Cimento*, 1961, vol. 21, no. 5, pp. 812–821.
13. Ginzburg V.L., Sazonov V.N., Syrovatskii S.I. Synchrotron radiation and its reabsorption, *Soviet Physics-Uspeski*, 1968, vol. 11, no. 1, pp. 34–48.
14. Sokolov A.A., Ternov I.M., Bagrov V.G. On radiation polarization of spin of electron, moving helically in magnetic field, *Problemy gravitatsii. Trudy V mezhdunarodnoy konferentsii po gravitatsii i teorii otnositel'nosti* (Problems of gravitation. Proceedings of V international conference on gravitation and relativity), Tbilisi, 1978, pp. 542–551.
15. Mychelkin E.G. Power and intensity of radiation from relativistic particles, *Izvestiya akademii nauk Kazakhskoy SSR, seriya fiziko-matematicheskaya*, 1968, no. 4, pp. 23–28.
16. Bagrov V.G., Bordovitsyn V.A., Bulenok V.G., Kulikova A.V. Kinematic identification of the angular power distribution and the linear polarization of radiation of an arbitrarily moving charge, *Russian Physics Journal*, vol. 58, no. 2, pp. 153–162.
17. Bordovitsyn V.A., Ternov I.M., Bagrov V.G. Spin light, *Physics-Uspeski*, 1995, vol. 38, no. 9, pp. 1037–1047.
18. Gal'tsov D.V. *Teoreticheskaya fizika dlya studentov-matematikov* (Theoretical physics for mathematical students), Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 2003, 318 p.
19. MacGregor M.H. On the interpretation of the electron anomalous magnetic moment, *Found. Phys. Lett.*, vol. 2, no. 6, pp. 577–589.
20. Ritus V.I. The shift of electron mass in intensive field, *Trudy FIAN*, 1986, vol. 168, pp. 52–119.
21. Schwinger J. On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron, *Phys. Rev.*, 1948, vol. 73, no. 4, pp. 416–417.

22. Ternov I.M., Bagrov V.G., Bordovitsyn V.A., Dorofeev O.F. Concerning the Anomalous Magnetic Moment of the Electron, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1969, vol. 28, no. 6, pp. 1206–1209.
23. Ternov I.M., Bagrov V.G., Bordovitsyn V.A., Dorofeev O.F. Vacuum magnetic moment of the electron moving in a constant and uniform magnetic field, *Doklady akademii nauk*, 1968, vol. 183, no. 4, pp. 810–812.
24. Ternov I.M., Bagrov V.G., Bordovitsyn V.A. The magnitude of the vacuum magnetic moment of the electron moving in a uniform magnetic field, *Soviet Physics Journal*, 1968, no. 11, pp. 17–22.
25. Ginzburg V.L. *Teoreticheskaya fizika i astrofizika. Dopolnitel'nye glavy* (Theoretical physics and astrophysics. Complementary chapters), Moscow: Nauka, 1987, 487 p.
26. Bordovitsyn V.A., Pozdeeva T.O. On basis of radiation-reaction force, *Russian Physics Journal*, 2006, no. 6, pp. 72–78.
27. Browne P.F. Electron spin and radiative reaction, *Ann. of Phys.*, 1970, vol. 89, pp. 254–258.
28. Sermiyagin A.V. New classical relativistic equation of charge motion in electromagnetic field, *Preprint OIYaI 32-11772.*, 1978, no. 1, pp. 7–14.
29. Barut A.O., Unal N. Generalisation of the Lorentz–Dirac equation to include spin, *Phys. Rev.*, 1989, vol. A40, pp. 5404–5406.
30. Tse Chin Mo, Papas C.H. New equation of motion for classical charged particle, *Phys. Rev.*, 1971, vol. D4, pp. 3566–3571.
31. Vilenkin A.V., Fomin P.I. The correspondence principle in the problem of the self-energy of the electron, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1975, vol. 40, no. 1, pp. 6–7.
32. Luiz A.M. The electromagnetic mass paradox, *Nuovo Cimento*, 1969, no. 9, pp. 429–430.

Received 10.03.2016

Bagrov Vladislav Gavrilovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Physics, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia
Institute of High Current Electronics, SB RAS, Academicheskyy ave. 2/3, 634055, Tomsk, Russia
E-mail: bagrov@phys.tsu.ru

Bordovitsyn Vladimir Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Physics, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia
E-mail: vabord@sibmail.com

Kulikova Anastasiya Vital'evna, Master's student, Department of Physics, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia
E-mail: anasta-kulikova@yandex.ru