УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1], *А. А. Агафонов* [2]

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПОЧТИ ВЫРОЖДЕННЫХ СКАЛЯРНО ЗАРЯЖЕННЫХ ФЕРМИОНОВ

На основе развитой ранее одним из авторов кинетической теории макроскопического описания плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием конструируются динамические статистические модели для космологической плазмы, содержащей сильно вырожденный скалярно заряженный фермионный компонент. Исследованы асимптотические свойства модели в ультрарелятивистском пределе

Ключевые слова: Релятивистская кинетика, фантомные скалярные поля, космологические модели, статистика Ферми, сильное вырождение

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Статистические системы частиц со скалярным взаимодействием

1.1. Математическая модель скалярно заряженной космологической плазмы

В предыдущей статьях [1–3] была сформулирована математическая модель статистической системы скалярно заряженных частиц, основанная на микроскопическом описании и последующей процедуре перехода к кинетической теории.

В условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) статистическая система является изотропной, и ее макроскопические моменты принимают вид соответствующих моментов идеальной жидкости [4]:

$$n_a^i = n_a u^i, \tag{1.1}$$

$$T_a^{ik} = (\mathcal{E}_a + \mathcal{P}_a)u^i u^k - \mathcal{P}_a g^{ik}, \tag{1.2}$$

где n_a^i – числовой вектор, T_a^{ik} – тензор энергии импульса (ТЭИ) "a" - го сорта частиц, u^i – единичный времениподобный вектор динамической скорости статистической системы

$$(u, u) = 1. \tag{1.3}$$

Закон сохранения энергии-импульса статистической в условиях ЛТР примет вид:

$$(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl})u^i{}_{,k}u^k = (g^{ik} - u^i u^k)(\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma\Phi_{\ ,k}); \tag{1.4}$$

$$\nabla_k(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl})u^k = (\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma\Phi_{\ ,k})u^k, \tag{1.5}$$

где σ – плотность скалярного заряда.

Закон сохранения фундаментального заряда q:

$$\nabla_k n_q u^k = 0, \quad n_q \equiv \sum_a q_a n_a. \tag{1.6}$$

Макроскопические скаляры, $\mathcal{E}, \mathcal{P}, n_e, \sigma$, определяются двумя скалярными функциями – химическим потенциалом μ и локальной температурой θ [1,3][3]:

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch} x dx}{\mathrm{e}^{-\gamma_a + \lambda_* \mathrm{ch} x} \pm 1}; \tag{1.7}$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x dx}{\mathrm{e}^{-\gamma_a + \lambda_* \mathrm{ch} x} \pm 1}; \tag{1.8}$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^4 x dx}{\mathrm{e}^{-\gamma_a + \lambda_* \mathrm{ch} x} \pm 1}; \tag{1.9}$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_a\Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2 x dx}{\mathrm{e}^{-\gamma_a + \lambda_* \mathrm{ch} z} \pm 1}, \tag{1.10}$$

[1]E-mail: ignatev_yu@rambler.ru
[2]E-mail: a.a.agathonov@gmail.com
[3]$G = \hbar = c = 1$

где введена эффективная масса скалярно заряженной частицы в скалярном поле Φ:

$$m_* = |m + q_a\Phi|, \tag{1.11}$$

и заданы безразмерные функции:

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_a = \frac{\mu_a}{\theta}. \tag{1.12}$$

1.2. Космологическая модель

В случае пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

все термодинамические функции зависят только от времени, и система уравнений (1.5) – (1.6) сводятся к двум уравнениям:

$$\dot{\mathcal{E}}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) = \sigma\dot{\Phi}; \tag{1.13}$$

$$\dot{n}_a + 3\frac{\dot{a}}{a}n_a = 0. \tag{1.14}$$

ТЭИ скалярного поля принимает вид ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T^{ik}_s = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \tag{1.15}$$

причем:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \varepsilon_2 m_s^2\Phi^2); \tag{1.16}$$

$$\mathcal{P}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - \varepsilon_2 m_s^2\Phi^2). \tag{1.17}$$

Здесь для классического скалярного поля $\epsilon_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$; v^i – динамическая скорость систем.

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma(t). \tag{1.18}$$

Первое уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \tag{1.19}$$

где $\mathcal{E}$ – суммарная плотность энергии плазмы и скалярного поля. Второе уравнение Эйнштейна тождественно выполняется в следствии уравнения скалярного поля (1.18) и законов сохранения (1.13).

Указанная система уравнений описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции полностью вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием (см. [3]).

2. Математическая модель космологической плазмы с сильно вырожденным скалярно заряженным фермионным компонентом

2.1. Двухкомпонентная скалярно заряженная Ферми - система

В работах [5,6] рассматривалась космологическая эволюция плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, как для Больцмановской плазмы, так и для полностью вырожденной Ферми - системы. Было показано, что результаты численного моделирования слабо зависят от статистики частиц — для однокомпонентной полностью вырожденной Ферми-системы и двухкомпонентной Больцмановской плазмы получились, фактически, одинаковые результаты. В частности, численное моделирование выявило два новых характерных свойства поведения таких космологических моделей: появление гигантских всплесков инвариантного космологического ускорения и сильный разогрев Больцмановской плазмы на ранних космологических стадиях, соответствующих нескольким порядкам Планковских времен. Выявленные всплески температуры Больцмановской плазмы привели к необходимости исследования влияния температуры на космологическую эволюцию скалярно заряженной Ферми - системы, которое и является предметом данной статьи. Для этого мы рассмотрим почти вырожденную двухкомпонентную скалярно заряженную Ферми - систему в случае равенства эффективных масс частиц и античастиц. Необходимость рассмотрения античастиц продиктована требованиями релятивистской статистики.

Пусть имеется равновесная Ферми-система с температурой θ. При релятивистских температурах необходимо учитывать компоненту античастиц. Рассмотрим симметричную теорию, в которой $m_*^+ = m_*^- = |q\Phi|$ (см., например, [6]). Если в ЛТР находятся и безмассовые зарядово-нейтральные частицы, для которых химический потенциал в ЛТР равен нулю, то из условий химического равновесия для соответствующих реакций аннигиляции должно быть:

$$\mu_+ + \mu_- = 0 \Rightarrow \mu_- = -\mu_+ = -\mu. \tag{2.1}$$

Таким образом, для плотностей числа частиц, энергии и давления в сопутствующей системе отсчета имеем:

$$n_\pm = \frac{2S+1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{\mp\gamma+\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}+1}p^2dp, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_\pm = \frac{2S+1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{\mp\gamma+\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}+1}p^2\sqrt{m_*^2+p^2}dp, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{p}_\pm = \frac{2S+1}{6\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{\mp\gamma+\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}+1}\frac{p^4dp}{\sqrt{m_*^2+p^2}}, \tag{2.4}$$

где

$$\gamma = \frac{\mu}{\theta} \tag{2.5}$$

– безразмерный, приведенный химический потенциал.

Предполагая выполненным закон сохранения заряда частиц, запишем:

$$\Delta n = \frac{2S+1}{2\pi^2}\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{-\gamma+\frac{E(p)}{\theta}}+1}p^2dp - \int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{+\gamma+\frac{E(p)}{\theta}}+1}p^2dp\right), \tag{2.6}$$

где $E(p) = \sqrt{m_*^2+p^2}$ – энергия частиц. Будем далее полагать выполненным условие сильного вырождения:

$$\gamma \gg 1, \tag{2.7}$$

тогда малой является величина:

$$\mathrm{e}^{-\gamma} \ll 1, \tag{2.8}$$

по которой мы и будем разлагать соответствующие интегралы.

2.2. Античастицы

Заметим, что вследствие (2.8) в подинтегральных выражениях для античастиц член с экспонентой является большим по сравнению с единицей, которую сразу можно отбросить. Таким образом, макроскопические плотности для античастиц в условиях сильного вырождения сразу легко находятся:

$$n_- = \frac{2S+1}{2\pi^2}\mathrm{e}^{-\gamma}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}p^2dp, \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_- = \frac{2S+1}{2\pi^2}\mathrm{e}^{-\gamma}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}p^2\sqrt{m_*^2+p^2}dp, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{p}_- = \frac{2S+1}{6\pi^2}\mathrm{e}^{-\gamma}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m_*^2+p^2}}{\theta}}\frac{p^4dp}{\sqrt{m_*^2+p^2}}, \tag{2.11}$$

и сводятся к классическим выражениям для соответствующих плотностей, выражающихся через модифицированные функции Бесселя с учетом множителя $e^{-\gamma}$. Как следует из (2.8) в условиях сильного вырождения античастиц, действительно, экспоненциально мало в плазме.

Выполняя интегрирование, получим:

$$n_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda}; \tag{2.12}$$

$$\mathcal{E}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \left(\frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right); \tag{2.13}$$

$$\mathcal{P}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2}; \tag{2.14}$$

$$\sigma_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} q m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.15}$$

где

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2n} t dt \tag{2.16}$$

– функции Бесселя мнимого аргумента (см., например, [7]), $\Gamma(z)$ – гамма-функция и введена безразмерная скалярная функция:

$$\lambda = \frac{m_*}{\theta}. \tag{2.17}$$

2.3. Частицы

Для нахождения макроскопических скаляров скалярно заряженных Ферми частиц используем метод Зоммерфельда (см., например, [8]) приближенного вычисления интеграла вида:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{-\gamma + \varepsilon/\theta} + 1} \approx \tag{2.18}$$

$$\int\limits_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} \theta^2 f'_\varepsilon(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} \theta^4 f'''_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(\mu) + \ldots. \tag{2.19}$$

для малых θ, причем полученная аппроксимация справедлива для *любой функции* $\varepsilon(p)$, как и для *любой функции* $f(\varepsilon)$. Также необходимо учесть релятивистские выражения для энергии и химического потенциала:

$$\varepsilon(p) = \sqrt{m_*^2 + p^2}; \quad \mu = \sqrt{m_*^2 + \mu_0^2}, \tag{2.20}$$

где μ_0 - нерелятивистский химический потенциал. Благодаря второму соотношению изменятся пределы интегрирования в первом интеграле (2.19): с $[0, \mu]$ на $[m_*, \sqrt{m_*^2 + \mu^2}]$.

Для плотности числа частиц функция $f(\varepsilon)$ принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2} \sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2} \varepsilon, \tag{2.21}$$

а выражение (2.2) с точностью до θ^4 равно:

$$n_+ = \frac{1}{3\pi^2} \mu_0^3 + \frac{1}{6} \theta^2 \frac{m_*^2 + 2\mu_0^2}{\mu_0} + \frac{7\pi^2}{120} \theta^4 \frac{m_*^4}{\mu_0^5}. \tag{2.22}$$

Первый член разложения равен плотности числа частиц полностью вырожденной Ферми системы, поэтому, сравнивая с аналогичным выражением, полученным в [9], можно отождествить Ферми импульс частиц и нерелятивистский химический потенциал:

$$\mu_0 = p_F \tag{2.23}$$

Используя безразмерную функцию

$$\psi = p_F / m_*, \tag{2.24}$$

перепишем выражение (2.22) с точностью до квадратичного по температуре члена:

$$n_+ = \frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2} + \theta^2\frac{m_*}{6}\frac{(1+2\psi^2)}{\psi}. \qquad (2.25)$$

Вычислим теперь плотность энергии Ферми частиц (2.3). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ формулы (2.18) принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2}\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2}. \qquad (2.26)$$

Тогда с точностью до квадратичного по температуре слагаемого плотность энергии Ферми частиц равна:

$$\mathcal{E}_+ = \frac{m_*^4}{8\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right] + \theta^2\frac{m_*^2}{6}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+3\psi^2)}{\psi}. \qquad (2.27)$$

Вычислим теперь давление Ферми частиц (2.4). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ формулы (2.18) равна:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{6\pi^2}(\varepsilon^2 - m_*^2)^{3/2}, \qquad (2.28)$$

и с точностью до квадратичного по температуре слагаемого давление Ферми частиц равно:

$$\mathcal{P}_+ = \frac{m_*^4}{24\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(2\psi^2 - 3) + 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right] + \theta^2\frac{m_*^2}{6}\psi\sqrt{1+\psi^2}. \qquad (2.29)$$

Первые слагаемые в (2.27), (2.29) совпадают с соответствующими выражениями, полученными для полностью вырожденной однокомпонентной Ферми - системы.

2.4. Фотоны

Для установления термодинамического равновесия между частицами и античастицами при высоких энергиях необходимо учитывать фотоны и другие безмассовые частицы, которые могут быть продуктами аннигиляции фермионов: именно, условие (2.1) справедливо при учете реакций аннигиляции частиц и античастиц. При этом в реакциях аннигиляции рождаются фотоны, которые необходимо учитывать в модели двухкомпонентной Ферми системы.

В условиях ЛТР плотность энергии и давление фотонов задаются выражениями:

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{\pi^2}{15}\theta^4,$$
$$\mathcal{P}_\gamma = \frac{\pi^2}{45}\theta^4. \qquad (2.30)$$

2.5. Закон сохранения числа частиц

В рассматриваемом приближении закон сохранения числа скалярного заряда (1.14) примет вид:

$$\begin{aligned} a^3\Delta n &= a^3(n_+ - n_-) = \\ & a^3\left[\frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2} + \theta^2\frac{m_*}{6}\frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \mathrm{e}^{-\gamma}\frac{m_*^3}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}\right] = \mathrm{Const}, \end{aligned} \qquad (2.31)$$

или, с помощью безразмерных функций λ, ψ:

$$a^3\Delta n = a^3\left[\frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2} + \frac{m_*^3}{6\lambda^2}\frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \frac{m_*^3\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}\right] = \mathrm{Const}. \qquad (2.32)$$

Разложим Δn по малости температуры:

$$\Delta n = n_0 + \delta n(\theta),$$

где n_0 – плотность числа частиц полностью вырожденной плазмы:

$$n_0 = \frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2}. \qquad (2.33)$$

Вычисляя поправку к этой плотности, δn, найдем:

$$\delta n = \frac{m_*^3}{6\lambda^2}\frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \frac{m_*^3 \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{2.34}$$

Соответственно этому разложению закон сохранения числа частиц примет вид:

$$\left[\dot n_0 + 3\frac{\dot a}{a}n_0\right] + \left[\delta\dot n + 3\frac{\dot a}{a}\delta n\right] = 0. \tag{2.35}$$

В случае полного вырождения вторая скобка равна нулю, а первую можно переписать как:

$$\dot n_0 + 3\frac{\dot a}{a}n_0 \equiv \frac{m_*^3\psi^3}{\pi^2}\frac{d}{dt}\ln(m_*\psi a) = 0, \tag{2.36}$$

откуда находим интеграл движения:

$$m_*\psi a = \mathrm{Const}. \tag{2.37}$$

2.6. Закон сохранения энергии-импульса

Найдем суммарные плотность энергии и давление плазмы, состоящей из скалярно заряженных фермионов и фотонов. Используя соответствующие выражения, получим плотность энергии плазмы:

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{m_*^4}{8\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] +$$
$$\theta^2\frac{m_*^2}{6}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+3\psi^2)}{\psi} + \mathrm{e}^{-\gamma}\frac{m_*^4}{\pi^2}\left(\frac{\mathrm{K}_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2}\right) + \frac{\pi^2}{15}\theta^4; \tag{2.38}$$

и давление:

$$\mathcal{P}_{pl} = \frac{m_*^4}{24\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(2\psi^2-3) + 3\ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] +$$
$$\theta^2\frac{m_*^2}{6}\psi\sqrt{1+\psi^2} + \mathrm{e}^{-\gamma}\frac{m_*^4}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{45}\theta^4 \tag{2.39}$$

Переходя к безразмерным функциям λ, ψ

$$\theta = \frac{m_*}{\lambda},$$
$$\gamma = \lambda\sqrt{1+\psi^2}, \tag{2.40}$$

с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя

$$\mathrm{K}_3(\lambda) = \mathrm{K}_1(\lambda) + \frac{4\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda} \tag{2.41}$$

получим окончательные выражения для макроскопических скаляров $\mathcal{E}_{pl}$, $\mathcal{P}_{pl}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{pl} &= \frac{m_*^4}{8\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] +\\ &\frac{m_*^4}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+3\psi^2)}{\psi} + \frac{m_*^4\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{[\lambda\mathrm{K}_1(\lambda)+3\mathrm{K}_2(\lambda)]}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{15}\frac{m_*^4}{\lambda^4};\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{pl} &= \frac{m_*^4}{24\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(2\psi^2-3) + 3\ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] +\\ &\frac{m_*^4}{6\lambda^2}\psi\sqrt{1+\psi^2} + \frac{m_*^4\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{45}\frac{m_*^4}{\lambda^4}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Аналогично найдем скалярную плотность заряда:

$$\sigma = \frac{qm_*^3}{2\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] + \theta^2\frac{qm_*}{6}\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi} + \mathrm{e}^{-\gamma}\frac{qm_*^3}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.44}$$

или через функции λ, ψ:

$$\sigma = \frac{qm_*^3}{2\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right] + \frac{qm_*^3}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi} + \frac{qm_*^3 \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \quad (2.45)$$

Разложим полученные макроскопические скаляры по малости температурных поправок:

$$\mathcal{E}_{pl} = \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E}(\theta)$$
$$\mathcal{P}_{pl} = \mathcal{P}_0 + \delta\mathcal{P}(\theta)$$
$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma(\theta)$$

Соответственно этому разложению запишем закон сохранения энергии-импульса (1.13) в форме:

$$\left[\dot{\mathcal{E}}_0 + 3\frac{\dot a}{a}(\mathcal{E}_0 + \mathcal{P}_0) - \sigma_0\dot\Phi\right] + \left[\delta\dot{\mathcal{E}} + 3\frac{\dot a}{a}(\delta\mathcal{E} + \delta\mathcal{P}) - \delta\sigma\dot\Phi\right] = 0. \quad (2.46)$$

Заметим, что в случае полного вырождения вторая скобка равна нулю, а первую можно переписать как:

$$\dot{\mathcal{E}}_0 + 3\frac{\dot a}{a}(\mathcal{E}_0 + \mathcal{P}_0) - \sigma_0\dot\Phi \equiv \frac{m_*^4\psi^3\sqrt{1+\psi^2}}{\pi^2}\frac{d}{dt}\ln(m_*\psi a) = 0. \quad (2.47)$$

Это соотношение сводится к интегралу движения (2.37).

2.7. Самосогласованная система уравнений

Таким образом для определения четырех неизвестных скалярных функций a, Φ, ψ, λ имеем полностью определенную систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot\Phi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma;$$
$$3\frac{\dot a^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E};$$
$$\Delta\dot n + 3\frac{\dot a}{a}\Delta n = 0;$$
$$\dot{\mathcal{E}}_{pl} + 3\frac{\dot a}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) = \sigma\dot\Phi; \quad (2.48)$$

Понизив порядок уравнения скалярного поля (1.18) с помощью стандартной замены, выпишем в явном виде систему уравнений (2.48) в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для случая фантомного скалярного поля с притяжением:

1. замена переменной:

$$\dot\Phi = Z; \quad (2.49)$$

2. уравнение Эйнштейна:

$$\frac{\dot a}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left\{\frac{m_*^4}{8\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+3\psi^2)}{\psi} + \frac{m_*^4 \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{[\lambda\mathrm{K}_1(\lambda) + 3\mathrm{K}_2(\lambda)]}{\lambda^2} - \frac{1}{8\pi}(-Z^2 + m_s^2\Phi^2)\right\}^{1/2}; \quad (2.50)$$

3. закон сохранения числа частиц:

$$a^3\left[\frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2} + \frac{m_*^3}{6\lambda^2}\frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \frac{m_*^3 \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}\right] = n_0; \quad (2.51)$$

4. уравнение скалярного поля:

$$\dot{Z} = -Z\sqrt{24\pi}\left\{\frac{m_*^4}{8\pi^2}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+3\psi^2)}{\psi} + \frac{m_*^4 \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{[\lambda \mathrm{K}_1(\lambda) + 3\mathrm{K}_2(\lambda)]}{\lambda^2} - \frac{1}{8\pi}(Z^2 - m_s^2\Phi^2)\right\}^{1/2} + m_s^2\Phi + \frac{2qm_*^3}{\pi}\left[\psi\sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi+\sqrt{1+\psi^2})\right] + \frac{2\pi^2 qm_*^3}{3\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi} + \frac{4qm_*^3\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi}\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}; \qquad (2.52)$$

5. закон сохранения энергии-импульса:

$$\frac{m_*^4\psi^3\sqrt{1+\psi^2}}{\pi^2}\left(\frac{\dot m}{m} + \frac{\dot\psi}{\psi} + \frac{\dot a}{a}\right) + \frac{m_*^4}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+4\psi^2)}{\psi}\left(4\frac{\dot m}{m} - 2\frac{\dot\lambda}{\lambda} + \frac{\dot\psi}{\psi}\frac{(3\psi^2(1+\psi^2)-1)}{(1+\psi^2)(1+3\psi^2)}\right) + \frac{m_*^4\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{[\lambda\mathrm{K}_1(\lambda)+3\mathrm{K}_2(\lambda)]}{\lambda^2}\times \left(4\frac{\dot m}{m} - \frac{\dot\lambda(1+\psi^2)+\lambda\psi\dot\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} - \dot\lambda\frac{(\lambda^2+12)\mathrm{K}_2(\lambda)+3\lambda\mathrm{K}_1(\lambda)}{3\mathrm{K}_2(\lambda)+\lambda\mathrm{K}_1(\lambda)}\right) + 3\frac{\dot a}{a}\left\{\frac{m_*^4}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}(1+4\psi^2)}{\psi} + \frac{m_*^4\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{4}{\lambda}+\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)}\right)\right\} - Z\frac{qm_*^3}{6\lambda^2}\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi} - Z\frac{qm_*^3\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2}\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} = 0. \qquad (2.53)$$

Полученная система дифференциальных уравнений, полностью описывающая модель сильно вырожденной скалярно заряженной Ферми - системы, существенно нелинейна и достаточно сложна для численного интегрирования. В данной статье мы ограничимся исследованием асимптотических свойств этой системы.

3. Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе

3.1. Ультрарелятивистский предел и условие сильного вырождения

Исследуем теперь асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе, когда $p_F \gg m$, $\theta \gg m$. Тогда:

$$\mu \to p_F, \quad \gamma \to \frac{p_F}{\theta}. \qquad (3.1)$$

Условие вырождения плазмы $\gamma \gg 1$ приводит к ограничению на функции:

$$\gamma = \frac{p_F}{\theta} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad p_F \gg \theta. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим разложение макроскопических скаляров плазмы по малому параметру вырождения Ферми системы:

$$\xi = \left(\frac{\theta}{p_F}\right)^2. \qquad (3.3)$$

В линейном приближении по ξ для Ферми - системы макроскопические скаляры принимают вид:

$$\begin{aligned}
\Delta n &= \frac{p_F^3}{3\pi^2}+\xi\frac{p_F^3}{3},\\
\mathcal{E}_{pl} &= \frac{p_F^4}{4\pi^2}+\xi\frac{p_F^4}{2}+\frac{\pi^2}{15}(p_F^2\xi)^2,\\
\mathcal{P}_{pl} &= \frac{p_F^4}{12\pi^2}+\xi\frac{p_F^4}{6}+\frac{\pi^2}{45}(p_F^2\xi)^2,\\
\sigma &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, в этом приближении $\sigma=0$ а, значит, ультрарелятивистская почти вырожденная плазмы взаимодействует со скалярным полем минимально, т.е. скалярное поле становится свободным.

3.2. Законы сохранения

1. Из закона сохранения числа частиц следует:

$$a^3p_F^3\left(1+\pi^2\xi\right)=\mathrm{Const}\quad\Rightarrow\quad p_F=\frac{p_0}{a}\left(1+\pi^2\xi\right)^{-1/3}. \tag{3.5}$$

Таким образом, окончательно получим для импульса Ферми соотношение:

$$p_F=\frac{p_0}{a}\left(1-\frac{\pi^2}{3}\xi\right) \tag{3.6}$$

2. Закон сохранения энергии-импульса перепишется как:

$$\frac{p_F^4}{\pi^2}\left\{\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot p_F}{p_F}+2\pi^2\xi\left(\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot p_F}{p_F}+\frac{\dot\xi}{4\xi}\right)\right\}+\frac{4\pi^2}{15}(p_F^2\xi)^2\left\{\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot p_F}{p_F}+\frac{\dot\xi}{2\xi}\right\}=0. \tag{3.7}$$

Раскладывая выражение по малости параметра ξ, получим окончательно:

$$\frac{p_F^4}{\pi^2}\left\{\frac{d}{dt}\ln\left(ap_F\right)+2\pi^2\xi\frac{d}{dt}\ln\left(ap_F\xi^{1/4}\right)\right\}+\frac{4\pi^2}{15}(p_F^2\xi)^2\frac{d}{dt}\ln\left(ap_F\xi^{1/2}\right)=0 \tag{3.8}$$

В случае полного вырождения ($\theta=\xi=0$) выражение (3.6) упрощается:

$$ap_F=\mathrm{Const}\quad\Rightarrow\quad p_F=\frac{p_0}{a}. \tag{3.9}$$

Таким образом, импульс Ферми частиц эволюционирует обратно пропорционален масштабному фактору.

В линейном приближении по малости ξ выражение (3.8) перепишем как:

$$\frac{\mathrm{C}_1}{a^4}\left[-\frac{\pi^2}{3}\dot\xi\left(1+\frac{\pi^2}{3}\xi\right)+2\pi^2\xi\dot\xi\left(\frac{1}{4\xi}-\frac{\pi^4}{9}\xi-\frac{\pi^2}{3}\right)\right]+\frac{\mathrm{C}_2}{a^4}\left(\xi^2-\frac{4\pi^2}{3}\xi^3\right)\dot\xi\left(\frac{1}{2\xi}-\frac{\pi^4}{9}\xi-\frac{\pi^2}{3}\right)=0 \tag{3.10}$$

Так как функция ξ функционально независима от других, это равенство может выполняться лишь в случае:

$$\dot\xi=0\quad\Rightarrow\quad\xi=\mathrm{Const}, \tag{3.11}$$

откуда получим закон эволюции импульса Ферми и температуры в ультрарелятивистском пределе:

$$p_F=\frac{p_0}{a}\left(1-\frac{\pi^2}{3}\xi\right)=\frac{\bar p_0}{a},\quad\theta=\frac{\theta_0}{a}. \tag{3.12}$$

4. Учет нерелятивистских поправок

4.1. Выражения для макроскопических скаляров

В ультрарелятивистском пределе для почти вырожденной плазмы должны выполняться соотношения

$$p_F \gg m_* \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\psi} = \frac{m_*}{p_F} \to 0.$$

Для почти вырожденной плазмы $\gamma \gg 1$ имеем:

$$\gamma = \frac{\mu}{\theta} = \frac{\sqrt{m_*^2 + p_F^2}}{\theta} = \frac{p_F\sqrt{1+(m/p_F)^2}}{\theta} = \frac{p_F\sqrt{1+(1/\psi)^2}}{\theta}. \tag{4.1}$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе $(1/\psi \to 0)$:

$$\gamma \to \bar{\gamma} = \frac{p_F}{\theta}.$$

Введем параметр вырождения:

$$\xi = \frac{1}{\bar{\gamma}^2} = \left(\frac{\theta}{p_F}\right)^2 = \frac{1}{(\psi\lambda)^2}$$

и разложим макроскопические скалярные функции плазмы по малости нерелятивистских поправок:

$$\begin{aligned}
\Delta n &= \frac{m_*^3\psi^3}{3\pi^2}\left(1+\pi^2\xi\right),\\
\mathcal{E}_{pl} &= \frac{m_*^4\psi^4}{4\pi^2}\left(1+\frac{1}{\psi^2}+2\pi^2\xi\right)+\frac{\pi^2}{15}(m_*^2\psi^2\xi)^2,\\
\mathcal{P}_{pl} &= \frac{m_*^4\psi^4}{12\pi^2}\left(1-\frac{1}{\psi^2}+2\pi^2\xi\right)+\frac{\pi^2}{45}(m_*^2\psi^2\xi)^2,\\
\sigma &= \frac{qm_*^3\psi^4}{2\pi^2}\frac{1}{\psi^2}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Доля античастиц в приближении $\psi \gg 1$, $\lambda \to 0$ равна:

$$\frac{n_-}{n_+} = 6\mathrm{e}^{-\xi^{-1/2}}\xi^{3/2} \tag{4.3}$$

и зависит только от ξ, поэтому при $\xi = \mathrm{Const}$ доля античастиц остается постоянной.

4.2. Законы сохранения

1. Из закона сохранения числа частиц следует:

$$a^3 m_*^3 \psi^3\left(1+\pi^2\xi\right) = \mathrm{Const} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{p_0}{am_*}\left(1+\pi^2\xi\right)^{-1/3}, \tag{4.4}$$

откуда для малых ξ получим:

$$\psi = \frac{p_0}{am_*}\left(1-\frac{\pi^2}{3}\xi\right), \quad (\xi \ll 1). \tag{4.5}$$

Видно, что в этом приближении выражение для ψ совпадает с выражением (3.6) для ультрарелятивистской плазмы.

2. Закон сохранения энергии-импульса с учетом нерелятивистских поправок принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{m_*^4\psi^4}{\pi^2}\left\{\left[\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot m_*}{m_*}+\frac{\dot\psi}{\psi}\right]+\frac{1}{\psi^2}\left[\frac{\dot a}{2a}+\frac{\dot m_*}{2m_*}+\frac{\dot\psi}{2\psi}\right]+\right.\\
&\left.+2\pi^2\xi\left[\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot m_*}{m_*}+\frac{\dot\psi}{\psi}+\frac{\dot\xi}{2\xi}\right]\right\}+\frac{4\pi^2}{15}(m_*^2\psi^2\xi)^2\left[\frac{\dot a}{a}+\frac{\dot m_*}{m_*}+\frac{\dot\psi}{\psi}+\frac{\dot\xi}{2\xi}\right]=0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

После упрощения выражения, получим:

$$\frac{m_*^4\psi^4}{\pi^2}\left\{\frac{d}{dt}\ln\left(am_*\psi\right)+\frac{1}{2\psi^2}\frac{d}{dt}\ln(am_*\psi)+\right.$$
$$\left.+2\pi^2\xi\frac{d}{dt}\ln\left(am_*\psi\xi^{1/4}\right)+\frac{\pi^4}{15}\xi^2\frac{d}{dt}\ln\left(am_*\psi\xi^{1/2}\right)\right\}=0 \qquad (4.7)$$

В случае полного вырождения ($\theta=\xi=0$):

$$am_*\psi=\mathrm{Const}\quad\Rightarrow\quad p_F=\frac{p_0}{a}. \qquad (4.8)$$

В линейном по малости ξ приближении соотношение (4.7) можно записать в виде:

$$\dot{\xi}\frac{\pi^2}{6}\left\{\left(1-\frac{a^2m_*^2}{p_0^2}\right)-\xi\frac{\pi^2}{3}\left(5\frac{a^2m_*^2}{p_0^2}+14-\frac{3}{5}\right)\right\}=0. \qquad (4.9)$$

Один из сомножителей в правой части (4.9) должен быть равен нулю. Если мы приравняем нулю выражение в фигурных скобках, то получим жесткую связь между параметрами системы, чего не должно быть. Таким образом, должно быть $\dot{\xi}=0$, и мы получим:

$$\dot{\xi}=0\quad\Rightarrow\quad\dot{\xi}=0\quad\Rightarrow\quad\xi=\mathrm{Const}. \qquad (4.10)$$

Но тогда снова:

$$p_F=\frac{p_0}{a}\left(1-\frac{\pi^2}{3}\xi\right)=\frac{p_0}{a}, \qquad (4.11)$$

и законы эволюции импульса Ферми и температуры плазмы совпадают с соответствующими законами ультрарелятивистской сильно вырожденной плазмы:

$$\theta\sim p_F\sim\frac{1}{a}. \qquad (4.12)$$

Заключение

Подводя итоги исследования, перечислим основные выявленные закономерности космологической эволюции сильно вырожденной Ферми - системы:

1. В случае ультрарелятивистской плазмы малые нерелятивистские поправки не влияют на поведение системы, и параметры, описывающие условия применимости ультрарелятивистского приближения, сохраняются:

$$\theta\sim p_F\sim\frac{1}{a}. \qquad (4.13)$$

2. Относительная доля античастиц в приближении $\psi\gg1$, $\lambda\to0$ сохраняется:

$$\frac{n_-}{n_+}=6\mathrm{e}^{-\xi^{-1/2}}\xi^{3/2}. \qquad (4.14)$$

3. Результаты исследования подтверждают общие закономерности, полученные в [10] для локально равновесных статистических систем.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Авторы благодарны членам семинара ВС – семинара по ультрарелятивиствой кинетики и космологии за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Г. Игнатьев. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - Вып. 1 - 2014. - с. 47-69.
2. Yu.G. Ignatyev and D.Yu. Ignatyev. // Grav. and Cosmol., **20**, No 4, 2014.
3. Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. // Grav. and Cosmol., **20**, No 4, 304 - 308 (2014)
4. Yu.G. Ignat'ev. // Russian Physics Journal, **26**, No 12, 9 (1983).
5. Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов, Д.Ю. Игнатьев, М.Л. Михайлов. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - Вып. 3 - 2014. - с. 16-31.
6. Yurii Ignat'ev, Alexander Agathonov, Mikhail Mikhailov and Dmitry Ignatyev. // Astrophys. Space Sci. 357, 1-21 (2015).
7. Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 360 с.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть I, 3-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. - 584 с. (т. V)
9. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov. // Grav. and Cosmol., **17**, 71 (2011); arXiv:1011.5774[gr-qc].
10. Ю.Г. Игнатьев. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - Вып. 2 - 2015. - с. 28-37.

Поступила в редакцию 17.06.2014

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Агафонов Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., ст. преподаватель, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov

Statistical Cosmological Systems of Strongly Degenerate Scalar Charged Fermions

Keywords: Relativistic Kinetics, Phantom Scalar Fields, Cosmological Acceleration, Computer Modelling.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

The kinetic theory of macroscopic description of plasma with interparticle scalar interaction developed by one of the Authors is used in the paper. On its basis we construct the dynamic statistical models for cosmological plasma containing strongly degenerate scalar charged fermion component. Asymptotic properties of the model are investigated in the ultrarelativistic limit

REFERENCES

1. Yu.G. Ignat'ev. *Space, Time and Fundamental Interaction*, - No. 1 - 2014. - p. 47-69.
2. Yu.G. Ignatyev and D.Yu. Ignatyev. *Grav. and Cosmol.*, **20**, No 4, 2014.
3. Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. *Grav. and Cosmol.*, **20**, No 4, 304 - 308 (2014).
4. Yu.G. Ignat'ev. *Russian Physics Journal*, **26**, No 12, 9 (1983).
5. Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev, M.L. Mikhailov. *Space, Time and Fundamental Interaction*, - No. 3 - 2014. - p. 16-31.
6. Yurii Ignat'ev, Alexander Agathonov, Mikhail Mikhailov and Dmitry Ignatyev. *Astrophys. Space Sci.*, 357, 1-21 (2015).
7. N.N. Lebedev. *Special Functions and its Applications*. Moscow: GIFML. – 1963 (in Russian).
8. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Pergamon Press, Oxford, second edition, 1969.
9. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov. *Grav. and Cosmol.*, **17**, 71 (2011); arXiv:1011.5774[gr-qc].
10. Yu.G. Ignat'ev. *Space, Time and Fundamental Interaction*, - No. 2 - 2015. - p. 28-37.

Received 17.06.2014

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Agathonov Alexander Alexeevich, Candidat of Physics and Mathematics, senior lecturer, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com