

УДК 537.8, 52-334.7

*М. А. Мастерова,¹ В. Я. Эпп²***ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НАМАГНИЧЕННОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА³**

Методом эффективной потенциальной энергии исследована динамика заряженных частиц в окрестности вращающегося намагниченного небесного тела с наклонной магнитной осью. Определены условия существования замкнутых областей пространства, в которые захватываются частицы и исследована геометрия таких областей. Рассмотрено два типа электромагнитного поля — поле магнитного дипольного момента и поле однородно намагниченной идеально проводящей сферы. В обоих случаях имеются замкнутые области пространства, в которые могут захватываться заряженные частицы с энергией ниже определенного значения. Если угол между вектором магнитного момента и вектором угловой скорости острый, то для положительно заряженных частиц эта область имеет торообразную форму и находится в районе магнитного экватора, а для отрицательно заряженных частиц потенциальная долина находится в районе магнитных плюсов и вытянута вдоль магнитной оси. Если этот угол тупой, то потенциальные долины для положительно и отрицательно заряженных частиц меняются местами. В случае дипольного магнитного поля области захвата примыкают к поверхности намагниченной сферы и не имеют минимума, а в случае идеально проводящей сферы имеются минимумы потенциальной энергии для положительно и отрицательно заряженных частиц, отделенные от поверхности тела.

Ключевые слова: радиационные пояса, поле диполя, магнитосфера, динамика частиц, планеты, звезды.

PACS: 97.10.Ld, 94.30.Xy

Введение

Движение заряженных частиц в магнитном поле небесного тела, магнитная ось которого совпадает с осью вращения, хорошо изучено на примере магнитного поля Земли. Это, так называемая, задача Штермера. Известно, что в таком магнитном поле существуют замкнутые области пространства, в пределах которых движутся заряженные частицы с энергией, не превышающей некоторого определенного значения. Такие области получили название радиационных поясов [1, 2].

В 1907 году Карл Штермер, исследуя движение заряженных частиц в дипольном магнитном поле, показал, что помимо полной энергии частицы, азимутальная компонента обобщенного импульса движущейся частицы, также является интегралом движения. Сохранение этих двух физических величин обусловлено независимостью от времени магнитного поля и цилиндрической симметрией относительно оси магнитного диполя. Наличие двух интегралов движения дает возможность исключить из уравнений движения одну координату и ввести двумерную эффективную потенциальную энергию. В работах [3, 4] этот метод использован для аналитического и численного исследования траекторий заряженных частиц в магнитном поле Земли.

Между тем, существуют тела, магнитная ось которых наклонена относительно оси вращения. Вопрос существования радиационных поясов в окрестности таких тел изучен в работах [5, 6]. Наиболее известным примером таких тел являются нейтронные звезды. Часть из них, а именно пульсары, интенсивно исследуются с использованием наблюдаемого излучения. Динамика заряженных частиц в поле нейтронной звезды имеет важное значение для объяснения природы излучения пульсара. Аналитическое решение уравнений движения в магнитном поле с наклонной магнитной осью представляет определенные трудности в связи с тем, что поле не обладает аксиальной симметрией и момент импульса частицы не является интегралом движения. В связи с этим, все предыдущие работы, посвященные динамике заряженных частиц в магнитосфере тел с наклонной магнитной осью, представляют собой либо численное интегрирование уравнений движения, либо приближенные оценки характера движения частиц. В настоящей статье излагается метод, который позволяет определить разрешенные и запрещенные для движения частиц области пространства в поле наклонного магнитного ротатора, если это поле аппроксимировать полем диполя.

¹E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

²E-mail: epp@tspu.edu.ru

³Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, грант № 3.867.2014/К.

Электромагнитное поле вращающегося намагниченного тела существенно зависит от того, является оно проводящим или нет. В случае проводящего небесного тела на его поверхности индуцируется распределенный заряд, создающий собственное квадрупольное поле. Предполагается, что нейтронные звезды являются проводящими с очень низким коэффициентом сопротивления. Первая модель электрического поля, которое генерируется в окрестности нейтронной звезды была разработана Дойчем [7]. Ряд других моделей были предложены и изучены несколькими авторами. Обзор этих работ можно найти в монографии [8].

Также существуют небесные тела, состоящие из непроводящего вещества, которые вращаются вокруг оси, не совпадающей с осью магнитного поля. Их магнитное поле хорошо аппроксимируется полем прецессирующего магнитного момента или «наклонным ротатором» [9]. Электромагнитное поле и магнитосфера наклонного проводящего ротатора изучались многими авторами. См., например, [10–15]. В работе [15], кроме того, проведена оценка энергии, которая может быть приобретена частицами в процессе ускорения в магнитосфере.

Некоторые вопросы динамики заряженной частицы в электромагнитном поле в вакууме были рассмотрены в статьях [16, 17]. Задача Штермера для параллельного проводящего ротатора была исследована в работе [18]. Обобщенная задача Штермера с учетом электромагнитных и гравитационных сил, действующих на заряженные пылинки вблизи планеты, рассмотрена в статье [20]. Динамика заряженной частицы вблизи бессиловой поверхности вращающейся намагниченной сферы была детально исследована в [21, 22].

В настоящей работе использован метод исследования динамики заряженных частиц с помощью эффективной потенциальной энергии разработанный в [5, 6]. Метод основан на использовании интеграла движения для полной энергии во вращающейся системе отсчета. Такой подход, в частности, позволяет определить условия при которых в окрестности намагниченного небесного тела с наклонной магнитной осью существуют замкнутые области пространства, в которые могут захватываться частицы, и позволяет исследовать геометрию таких областей.

1. Электромагнитное поле вращающейся намагниченной сферы

Первой моделью, описывающей магнитосферу нейтронной звезды является вакуумная модель [23, 24]. Deutsch [7] моделировал нерелятивистскую вращающуюся намагниченную звезду как идеально проводящую сферу, жестко вращающуюся в вакууме. Для того чтобы ввести релятивистскую модель источника поля Belinsky и др. [25, 26] рассмотрели бесконечно тонкий постоянный магнит конечной длины. Эта модель является применимой для расчета поля на больших расстояниях, но она не может быть использована для расчетов в ближней зоне, поскольку геометрия источника существенно отличается от сферической.

Georgiou [27] нашел точные релятивистские решения для электромагнитного поля внутри и вне вращающейся намагниченной нейтронной звезды. Расчет поля был сделан как обобщение поля медленно вращающейся нейтронной звезды, которая была изучена в [28], с учетом эффектов общей теории относительности. Поле вращающейся намагниченной сферы не являющейся ни проводником ни диэлектриком было вычислено в работе [29]. Существует большое разнообразие других работ, в которых представлены расчеты электромагнитного поля вращающейся намагниченной сферы [30–32]. Эти результаты существенно зависят от используемой модели намагниченной сферы и скорости ее вращения.

Модель релятивистской вращающейся сферы достаточно сложна. Прежде всего, твердый шар не совместим с теорией относительности. Следовательно, релятивистской моделью может быть жидкая или газовая модель. Во-вторых, поле быстро вращающегося тела зависит от формы тела (которая, вообще говоря, уже не является сферической) и от природы намагниченности. В этой статье мы принимаем в качестве модели внешнего электромагнитного поля поле нерелятивистской вращающейся однородно намагниченной проводящей сферы. А именно, считаем что скорость точек экватора этой сферы много меньше скорости света. Если ввести приведенный радиус сферы $a = \omega r_0 / c$, где ω — угловая скорость вращения, r_0 — радиус сферы, а c — скорость света, то указанное условие запишется как $a \ll 1$. Цилиндр радиуса $R = c/\omega$ принято называть световым цилиндром. В этих терминах нерелятивистской вращающейся сферой является сфера, радиус которой много меньше радиуса светового цилиндра.

Исследование взаимодействия заряженной частицы с полем намагниченной сферы мы проводим в два этапа. В следующих разделах мы пренебрегаем размерами сферы, то есть, считаем, что частица находится на расстояниях, много больших радиуса сферы. Нетрудно показать, что все модели в цитированных выше работах дают одно и то же представление для поля вдали от

поверхности вращающегося тела, какую бы форму оно не имело, — это поле совпадает с полем точечного прецессирующего диполя. В разделе 4 мы исследуем особенности взаимодействия частиц с полем вблизи поверхности сферы, используя формулы Дойча в приближении нерелятивистской сферы.

Разложим выражения, полученные Дойчем [7] по степеням a . С точностью до второго порядка по a мы получаем следующие уравнения для векторов электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} поля в сферической системе координат r, θ, φ [6]:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\mu k^3 a^2}{2\rho^4} \{ \cos \alpha (3 \cos 2\theta + 1) + \rho \sin \alpha \sin 2\theta [3C(\rho, \lambda) - \rho \cos \lambda] \}, \\ E_\theta &= -\frac{\mu k^3}{\rho^2} \left[\rho C(\rho, \lambda) \sin \alpha \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\theta \right) + \frac{a^2}{\rho^2} \cos \alpha \sin 2\theta \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{\mu k^3}{\rho} S(\rho, \lambda) \sin \alpha \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right), \\ H_r &= \frac{2\mu k^3}{\rho^3} [\cos \alpha \cos \theta + C(\rho, \lambda) \rho \sin \alpha \sin \theta], \\ H_\theta &= \frac{\mu k^3}{\rho^3} [\cos \alpha \sin \theta + C_\rho(\rho, \lambda) \rho^2 \sin \alpha \cos \theta], \\ H_\varphi &= \frac{\mu k^3}{\rho} \sin \alpha S_\rho(\rho, \lambda), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где μ — магнитный момент сферы, α — угол между вектором магнитного момента и осью вращения, $\lambda = \varphi - \omega t$, $\rho = r\omega/c$, $k = \omega/c$. Ось Z направлена вдоль вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Мы также разложили:

$$\sin(\lambda - a) \approx \sin \lambda - a \cos \lambda, \quad \cos(\lambda - a) \approx \cos \lambda + a \sin \lambda.$$

Здесь введены функции

$$S(\rho, \lambda) = \frac{\sin(\rho + \lambda)}{\rho} - \cos(\rho + \lambda), \quad C(\rho, \lambda) = \frac{\cos(\rho + \lambda)}{\rho} + \sin(\rho + \lambda), \quad (1.3)$$

обладающие следующими свойствами (аргументы опущены):

$$S^2 + C^2 = 1 + \rho^{-2}, \quad S \sin \lambda + C \cos \lambda = \rho^{-1}, \quad C \sin \lambda - S \cos \lambda = 1, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = C, \quad \frac{\partial S}{\partial \rho} \equiv S_\rho = \sin(\rho + \lambda) + \frac{\cos(\rho + \lambda)}{\rho} - \frac{\sin(\rho + \lambda)}{\rho^2}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = -S, \quad \frac{\partial C}{\partial \rho} \equiv C_\rho = \cos(\rho + \lambda) - \frac{\sin(\rho + \lambda)}{\rho} - \frac{\cos(\rho + \lambda)}{\rho^2}. \quad (1.6)$$

Поле, описываемое формулами (1.2), является полем вращающегося точечного магнитного диполя, в то время как электрическое поле (1.1) является суперпозицией дипольного и квадрупольного полей. Квадрупольная часть состоит из членов, пропорциональных a^2/ρ^2 и убывающих с расстоянием как ρ^{-4} . На больших расстояниях $\rho \gg a$ эта часть стремится к нулю быстрее и электромагнитное поле становится полем вращающегося магнитного диполя.

Поле вблизи поверхности намагниченного тела существенно зависит от используемой модели. Поле (1.1) найдено для идеально проводящей сферы. Поле наклонного ротатора с использованием других моделей найдено в работах, цитированных выше, и сильно отличается от поля, полученного в [7]. Но если разложить поле, полученное в различных моделях по степеням a , то вдали от поверхности оно принимает форму поля вращающегося точечного диполя. Например, это имеет место для полей в моделях, принятых в работах [33] и [29]. Внешнее поле однородно намагниченной не проводящей сферы также совпадает с полем точечного диполя.

Далее рассмотрим динамику заряженных частиц в поле точечного магнитного диполя. Эта модель применима вдали от поверхности тел, имеющих существенную дипольную компоненту магнитного поля, и во всем пространстве вне не проводящей намагниченной сферы. Тогда магнитное поле дается уравнениями (1.2), а электрическое поле имеет вид

$$E_r = 0, \quad E_\theta = -\frac{\mu k^3}{\rho} C(\rho, \lambda) \sin \alpha, \quad E_\varphi = \frac{\mu k^3}{\rho} S(\rho, \lambda) \sin \alpha \cos \theta. \quad (1.7)$$

Поле (1.2) и (1.7) может быть представлено с помощью четырехмерного векторного потенциала A^ν . В сферической системе координат $x^\nu = (ct, r, \theta, \varphi)$ его можно представить в виде

$$A^0 = A^1 = 0, \quad A^2 = -\frac{\mu}{r^2} S(\rho, \lambda) \sin \alpha, \quad A^3 = \frac{\mu}{r^3} [\cos \alpha - C(\rho, \lambda) \rho \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta]. \quad (1.8)$$

В следующих разделах мы изучим динамику и потенциальную энергию заряженных частиц в поле вращающегося диполя, которое задается уравнениями (1.2) и (1.7), а в разделе 4 вернемся к полю, заданному уравнениями (1.1), (1.2).

2. Эффективная потенциальная энергия

В работах [5, 6] показано, что в поле наклонного магнитного ротатора существуют области захвата заряженных частиц с энергией ниже определенных значений. Здесь мы найдем эти области другим методом. Для определения разрешенных для движения частицы областей обычно используется метод эффективной потенциальной энергии. Метод состоит в том, что полная энергия частицы представляется как сумма положительно определенной квадратичной комбинации обобщенных скоростей (эффективная кинетическая энергия) и некоторой функции обобщенных координат (эффективная потенциальная энергия). Разрешенные области определяются из условия, что полная энергия больше эффективной потенциальной энергии. Наличие интегралов движения позволяет исключить соответствующее число обобщенных скоростей и сузить допустимую область движения.

Пусть произвольное электромагнитное поле, вращающееся с угловой скоростью ω , задано потенциалом

$$A^\nu = A^\nu(r, \theta, \phi - \omega t + \rho).$$

В сопутствующей, вращающейся системе отсчета $x^{\nu'} = (ct, r, \theta, \psi)$, $\psi = \varphi - \omega t$ поле не зависит от времени. Следовательно, соответствующий обобщенный импульс

$$p_{0'} = mu_{0'} + \frac{e}{c} A_{0'} \quad (2.1)$$

сохраняется. Штрихами обозначены величины во вращающейся системе отсчета, $u^{\nu'} = (\dot{c}t, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ — четырехмерная скорость. Точкой обозначена производная по собственному времени. Временная компонента 4-импульса $p_{0'}$ представляет собой энергию частицы в сопутствующей системе отсчета деленную на скорость света.

Чтобы ввести эффективную потенциальную энергию во вращающейся системе отсчета, достаточно найти уравнение, содержащее сумму квадратов компонентов скорости, интеграл движения и потенциал как функцию координат. Например, можно использовать, равенство

$$g_{\mu'\nu'} u^{\mu'} u^{\nu'} = c^2, \quad (2.2)$$

где $g_{\mu'\nu'}$ — метрический тензор вращающейся системы отсчета

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1 - \rho^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & -r\rho \sin^2 \theta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ -r\rho \sin^2 \theta & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Подставим в (2.1) $u_{0'}$

$$u_{0'} = g_{0'0'} u^{0'} + g_{0'3'} u^{3'}$$

и выразим $u^{0'}$

$$u^{0'} = \frac{1}{mg_{0'0'}} (p_{0'} - g_{0'3'} u^{3'} - \frac{e}{c} A_{0'})$$

Подставляем это выражение в тождество (2.2)

$$c^2 = \frac{(p_{0'} - \frac{e}{c} A_{0'})^2}{m^2 g_{0'0'}} + g_{1'1'} (u^{1'})^2 + g_{2'2'} (u^{2'})^2 + \frac{g_{0'0'} g_{3'3'} - g_{0'3'}^2}{g_{0'0'}} (u^{3'})^2 \quad (2.4)$$

Подставляя компоненты метрического тензора и $u^\nu = (ct, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, получим

$$\frac{(p_{0'} - \frac{e}{c}A_{0'})^2}{m^2(1 - \rho^2 \sin^2 \theta)} - c^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \dot{\psi}^2 \quad (2.5)$$

Разрешенные для движения области определяются неравенством

$$(p_{0'} - \frac{e}{c}A_{0'})^2 > m^2 c^2 (1 - \rho^2 \sin^2 \theta).$$

Поверхность, ограничивающая разрешенную область, задается уравнением

$$(p_{0'} - \frac{e}{c}A_{0'})^2 = m^2 c^2 (1 - \rho^2 \sin^2 \theta). \quad (2.6)$$

Если ввести безразмерную полную энергию частицы $\mathcal{E} = p_{0'}/mc$, то уравнение поверхности, разделяющей разрешенную и запрещенную для движения области, примет вид

$$\left(\mathcal{E} - \frac{e}{mc^2}A_{0'}\right)^2 = 1 - \rho^2 \sin^2 \theta. \quad (2.7)$$

Семейство поверхностей, задаваемых параметром \mathcal{E} , можно представить как эквипотенциальные поверхности потенциала

$$V = \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} + \frac{e}{mc^2}A_{0'}. \quad (2.8)$$

Первое слагаемое, не зависящее от электромагнитного взаимодействия, можно интерпретировать как «потенциал» центробежной силы во вращающейся системе отсчета. Действительно, его положительное значение можно записать в виде

$$V_{cf} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}},$$

где $R = r \sin \theta$ — расстояние от оси вращения. Восстанавливая размерность и переходя к нерелятивистскому приближению $\omega R \ll c$, запишем

$$mc^2 V_{cf} = mc^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2.$$

Градиент этого выражения с обратным знаком дает нерелятивистскую формулу для центробежной силы $F = m\omega^2 R$. Отсюда, в частности, следует, что первое слагаемое в формуле (2.10) должно быть взято с плюсом. Таким образом, эффективная потенциальная энергия заряженной частицы в произвольном электромагнитном поле, созданном вращающимся с постоянной скоростью источником поля, равна

$$V = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} + \frac{e}{mc^2}A_{0'}. \quad (2.9)$$

Найдем эффективную потенциальную энергию прецессирующего дипольного момента. Для этого с помощью матрицы преобразования

$$J_{\mu'}^{\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

преобразуем потенциал поля (1.8) в сопутствующую систему отсчета:

$$A_{0'} = \frac{\mu\omega}{2rc} [C(\rho, \psi)\rho \sin 2\theta \sin \alpha - 2 \sin^2 \theta \cos \alpha], \quad (2.11)$$

$$A_{1'} = 0, \quad (2.12)$$

$$A_{2'} = \mu S(\rho, \psi) \sin \alpha, \quad (2.13)$$

$$A_{3'} = \frac{\mu}{r} [C(\rho, \psi)\rho \sin 2\theta \sin \alpha - 2 \sin^2 \theta \cos \alpha]. \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.9), получим

$$V = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} + \frac{N}{2\rho} [C(\rho, \psi)\rho \sin \alpha \sin 2\theta - 2 \cos \alpha \sin^2 \theta], \quad N = \frac{e\mu\omega^2}{mc^4}. \quad (2.15)$$

Эта формула совпадает с выражением, полученным в работе [6] другим методом. Заметим, что все физические параметры частицы и поля собраны в одном безразмерном параметре N . Например, для электронов значение $|N|$ для пульсара в Крабовидной туманности составляет $5 \cdot 10^{10}$, для Юпитера – 0.03, для Земли – $3 \cdot 10^{-7}$.

Для удобства аналитического исследования удобно исключить переменную ρ из аргумента тригонометрических функций в $C(\rho, \psi)$ в формуле (2.15). Для этого сделаем замену $\psi = \eta - \rho + \sigma$, где

$$\sin \sigma = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \quad \cos \sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}. \quad (2.16)$$

В таком представлении потенциальная энергия становится симметричной относительно плоскости $\eta = 0, \pi$, проходящей через векторы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\omega}$:

$$V = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} + \frac{N}{2\rho} \left(\sqrt{1 + \rho^2} \sin \alpha \sin 2\theta \cos \eta - 2 \cos \alpha \sin^2 \theta \right). \quad (2.17)$$

Кроме того, функция V симметрична относительно преобразований $\eta \rightarrow \eta + \pi; \theta \rightarrow \pi - \theta$.

На рисунках ниже представлены примеры сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью $\eta = 0$, проходящей через ось вращения небесного тела, для положительно и отрицательно заряженных частиц. Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $V = \text{const}$. Это означает, что частица, обладающая полной энергии \mathcal{E} и имеющая нулевую скорость на эквипотенциальной поверхности $V = \mathcal{E}/mc^2$, может двигаться согласно уравнениям движения в области, где потенциальная энергия меньше ее полной энергии. Например, положительно заряженная частица с полной энергией $\mathcal{E} = 1.08 mc^2$ может двигаться везде, кроме замкнутой области, имеющей форму гантели, отмеченной значением 1.08 на рисунке 1.

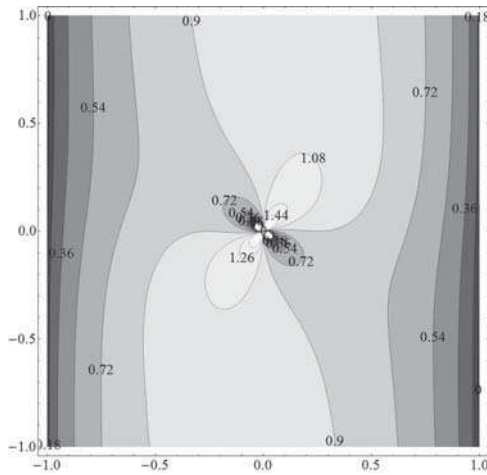


Рис. 1. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = 0.1, \eta = 0^0, \alpha = 80^0$.

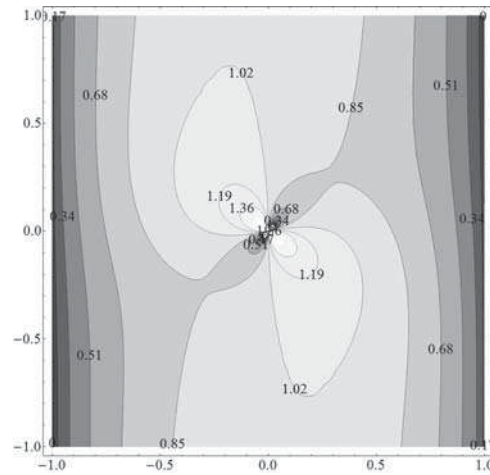


Рис. 2. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = -0.1, \eta = 0^0, \alpha = 80^0$.

Здесь и далее представлена структура потенциальной энергии для $\alpha \leq \pi/2$, для положительно и отрицательно заряженных частиц. Структура для $\alpha > \pi/2$ может быть получена заменой e на $-e$ и θ на $\pi - \theta$.

На рисунках 1 и 2 изображены профили для $N = \pm 0.1$, а на рис. 3 и 4 — для $N = \pm 10$. Знак N совпадает со знаком заряженной частицы согласно определению N (2.15). Как видно из рисунков 1, 3 потенциальная энергия положительно заряженной частицы имеет потенциальную долину в виде тора вокруг центра поля. Для частиц с относительно малой энергией существует две разрешенные области. Одна из них - это замкнутая область внутри тора и другая область

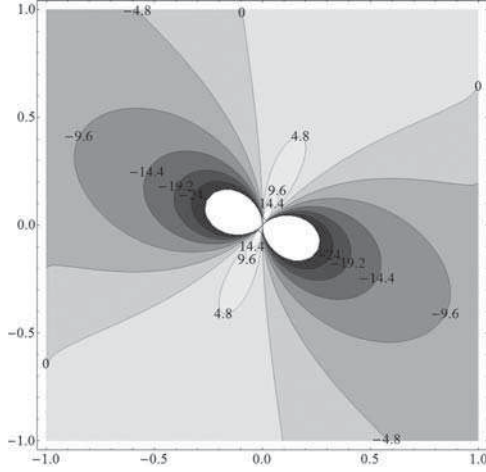


Рис. 3. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = 10, \eta = 0^0, \alpha = 45^0$.

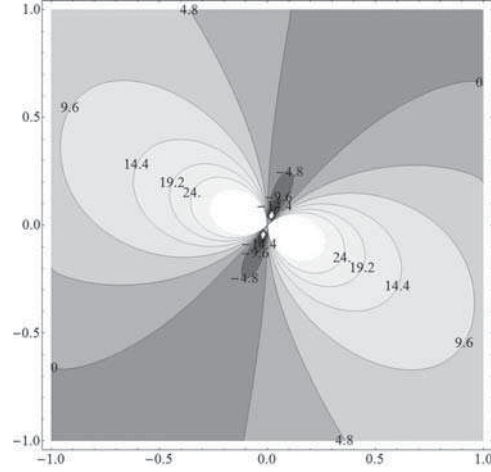


Рис. 4. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = -10, \eta = 0^0, \alpha = 45^0$.

вне искривленной цилиндрической поверхности. Например, на рис. 1 это соответствует частицам с энергией меньше чем $\mathcal{E} = 0.72$. Сравнивая рисунки 1, 2 и 3, 4, видим, что изменение знака заряда приводит к тому, что «потенциальные холмы» сменяются «потенциальными ямами» и наоборот.

3. Стационарные точки эффективной потенциальной энергии

В стационарных точках эффективной потенциальной энергии частица может находиться в состоянии равновесия — устойчивого, неустойчивого или безразличного в зависимости от вторых производных. Вопрос наличия экстремумов потенциальной энергии чрезвычайно важен для анализа процесса формирования магнитосферы небесного тела — в случае существования минимумов потенциальной энергии заряженные частицы могут накапливаться в окрестности этих минимумов. В работе [6] показано, что потенциал (2.15) имеет 6 стационарных точек — 2 точки в экваториальной плоскости и 4 точки вне этой плоскости. Система уравнений на координаты стационарных точек имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad (3.1)$$

где $q_i = \rho, \theta, \psi$. Если $|N| \ll 1$, то координаты всех стационарных точек ρ_i много меньше единицы. Тогда систему уравнений (3.1) можно разложить по ρ и представить решение в аналитическом виде [5].

Для положительно заряженной частицы:

$$\rho_1^3 = \frac{N}{4} \left[\cos \alpha + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \text{tg } \theta_1 = \frac{-1}{2 \sin \alpha} \left[3 \cos \alpha + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \psi_1 = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_2^3 = \frac{N}{4} \left[\cos \alpha + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \text{tg } \theta_2 = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left[3 \cos \alpha + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \psi_2 = \pi. \quad (3.3)$$

Для отрицательно заряженной частицы:

$$\rho_3^3 = \frac{N}{4} \left[\cos \alpha - \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \text{tg } \theta_3 = \frac{-1}{2 \sin \alpha} \left[3 \cos \alpha - \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \psi_3 = 0, \quad (3.4)$$

$$\rho_4^3 = \frac{N}{4} \left[\cos \alpha - \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \text{tg } \theta_4 = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left[3 \cos \alpha - \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \right], \quad \psi_4 = \pi. \quad (3.5)$$

И в экваториальной плоскости две симметричные стационарные точки

$$\rho_{5,6} = (N \cos \alpha)^{1/3}, \quad \psi_5 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_6 = \frac{3\pi}{2}, \quad (3.6)$$

существующие при условии, что $N \cos \alpha > 0$. Это означает, что две последние стационарные точки соответствуют положительным зарядам, если угол между вектором угловой скорости и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ острый и отрицательным зарядам если этот угол тупой.

Если $|N|$ не мало, то в аналитической форме удастся выразить только азимутальные координаты стационарных точек. Нетрудно убедиться в том, что стационарные точки при $\theta \neq \pi/2$ лежат в плоскости $\eta = 0, \pi$, а в экваториальной плоскости они имеют азимутальные координаты $\eta = \pi/2, 3\pi/2$.

Все стационарные точки являются седловыми точками эффективной потенциальной энергии, то есть, они соответствуют положениям неустойчивого равновесия заряженной частицы во вращающейся системе отсчета. В случае $|N| \ll 1$ это утверждение доказано аналитически [5]. Если $|N|$ не мало, то это видно из графического представления поверхностей уровня потенциальной энергии. В частности, на рис. 5 и 6 представлены сечения эквипотенциальных поверхностей, построенных по формуле (2.17) для положительно и отрицательно заряженных частиц, соответственно, при $|N| = 0.5$.

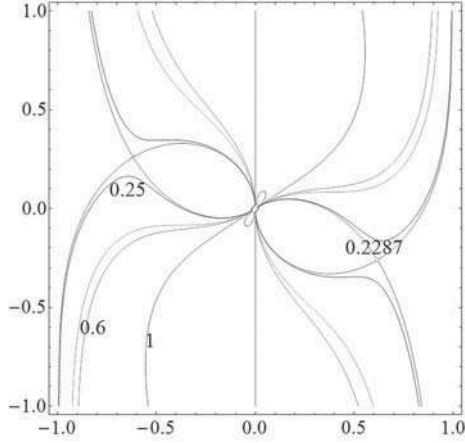


Рис. 5. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = 0.5, \eta = 0^0, \alpha = 60^0$.

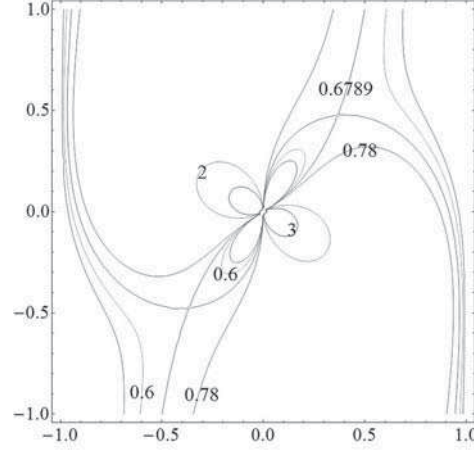


Рис. 6. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = -0.5, \eta = 0^0, \alpha = 60^0$.

На рис. 5 седловые точки находятся в точках соприкосновения двух эквипотенциальных поверхностей с уровнем энергии $V \approx 0.2287$, а на рис. 6 — поверхностей, соответствующих уровню $V \approx 0.6789$. С ростом величины магнитного момента небесного тела стационарные точки удаляются от оси вращения асимптотически приближаясь к поверхности светового цилиндра.

4. Потенциальная энергия вблизи проводящей однородно намагниченной сферы

До этого мы пренебрегали квадрупольным электрическим полем, которое генерируется индуцированными зарядами в случае проводящего небесного тела. Поэтому полученные результаты справедливы для поля непроводящего тела или для поля проводящего тела, но на расстояниях, больших по сравнению с размерами небесного тела, поскольку квадрупольное поле убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Как уже упоминалось в разделе 1, электрическое поле вблизи звезды зависит от используемой модели. В этом разделе мы исследуем потенциальную энергию заряженных частиц в поле абсолютно проводящей намагниченной сферы [7]. Эти поля описываются уравнениями (1.1) и (1.2). Соответствующий четырехмерный векторный потенциал может быть записан как:

$$\begin{aligned} A^0 &= -\frac{\omega r_0^2 \mu}{6cr^3} [3\rho C(\rho, \lambda) \sin 2\theta \sin \alpha + \cos \alpha (3 \cos 2\theta + 1)], \\ A^1 &= 0, \\ A^2 &= -\frac{\mu}{r^2} S(\rho, \lambda) \sin \alpha, \\ A^3 &= \frac{\mu}{r^3 \sin \theta} [\cos \alpha \sin \theta - C(\rho, \lambda) \rho \sin \alpha \cos \theta]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Преобразуем этот потенциал во вращающуюся систему отсчета и подставим его в уравнение (2.9). В результате получим потенциальную энергию с учетом квадрупольного электрического поля

$$V = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} + \frac{N}{2\rho} \left\{ [C(\rho, \psi) \rho \sin \alpha \sin 2\theta - 2 \cos \alpha \sin^2 \theta] \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{4}{3} \frac{a^2}{\rho^2} \cos \alpha \right\}. \quad (4.2)$$

Она отличается от потенциальной энергии (2.15) членами, пропорциональными a^2/ρ^2 , где $a = \omega r_0/c$. Величина a для реальных небесных объектов значительно меньше единицы. Для примера, величина a для Земли, Юпитера и пульсара в Крабовидной туманности равна: $1.5 \cdot 10^{-6}$, $4 \cdot 10^{-5}$ и $7.6 \cdot 10^{-3}$. Представим примеры эквипотенциальных поверхностей для $a = 0,01$. Графики, построенные для всего интервала ρ внутри светового цилиндра, практически не отличаются от представленных в разделе 2. Отличие наблюдается лишь в области $\rho \sim a$. Эти различия видны на рисунках 7 – 10.

Отличительным свойством потенциальной энергии в этом случае является то, что для малых углов наклона α , для отрицательно заряженных частиц, не существует замкнутых областей захвата. Для больших углов наклона, близких к 90° , существует минимум потенциальной энергии для отрицательных и положительных заряженных частиц. Эти минимумы и области захвата отделены от поверхности сферы как видно из рисунков 9 и 10. Форма сечений в пределах области $\rho \sim a$ не меняется с ростом N . Причина в том, что первый член в уравнении (4.2) близок к единице в случае малых ρ и им можно пренебречь, поскольку потенциальная энергия определена с точностью до аддитивной константы.

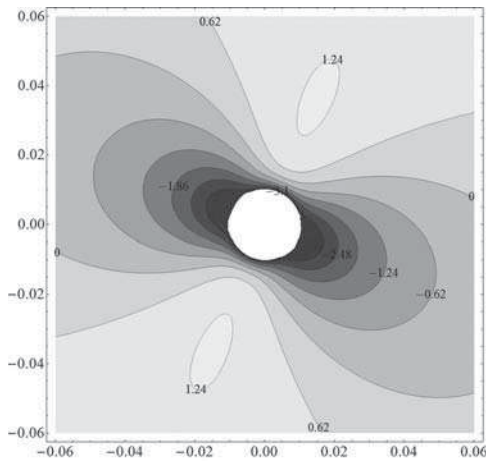


Рис. 7. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = 0.1, \eta = 0^\circ, \alpha = 45^\circ$.

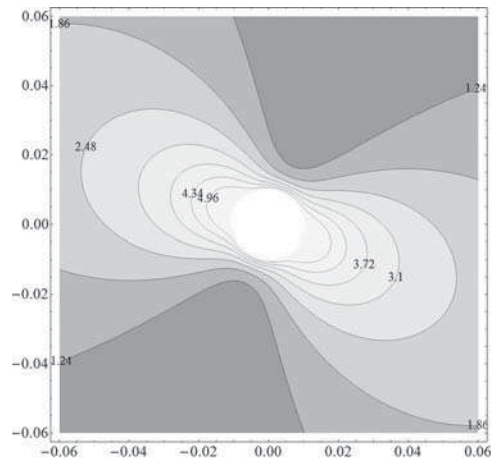


Рис. 8. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = -0.1, \eta = 0^\circ, \alpha = 45^\circ$.

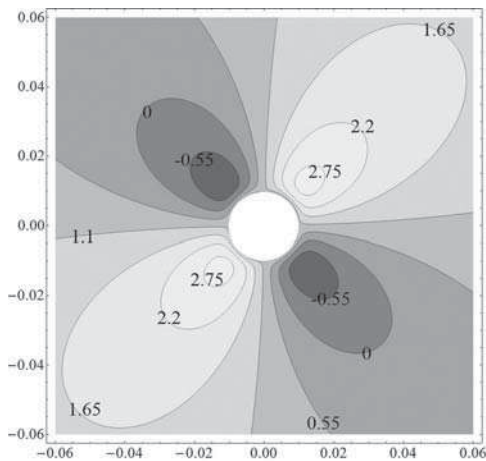


Рис. 9. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = 0.1, \eta = 0^\circ, \alpha = 90^\circ$.

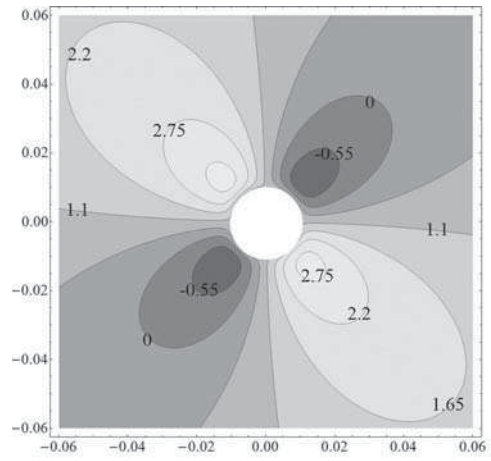


Рис. 10. Сечения эквипотенциальных поверхностей для $N = -0.1, \eta = 0^\circ, \alpha = 90^\circ$.

Заключение

Для того, чтобы выяснить, возможны ли «радиационные пояса» в окрестности небесного тела с наклонной магнитной осью, исследована эффективная потенциальная энергия частиц в поле наклонного вращающегося магнитного диполя. Показано, что существуют замкнутые эквипотенциальные поверхности, которые совместно вращаются с полем диполя. В этих поверхностях заключены частицы с начальной энергией, ниже определенного уровня. Эффективная потенциальная энергия исследована на наличие экстремумов и найдены все стационарные точки. В качестве примеров построены эквипотенциальные поверхности для некоторых значений интеграла движения, для положительного и отрицательного заряда частицы и для различных значений магнитного момента небесного тела.

Потенциальная энергия, описываемая уравнением (2.17), найдена в соответствии с предположением, что намагниченное тело находится в вакууме и магнитосфера не заполнена плазмой. Но, как видно из последующего анализа, области захвата для частиц разного заряда расположены в разных пространственных областях. Вероятно, возможны условия, при которых области захвата накапливают настолько большой заряд, что он заметно искажает геометрию электромагнитного поля по сравнению с вакуумной магнитосферой. В этом случае следует решать самосогласованную задачу распределения плазмы в магнитосфере. Обсуждение этого вопроса можно найти в монографиях [8, 35].

В окрестности тел с очень сильным магнитным полем, таких как нейтронные звезды, на релятивистские заряженные частицы действует сила радиационного трения, что приводит к потере энергии частиц. Хотя движение частиц с учетом радиационного трения не обсуждается в данной работе, исследование потенциальной энергии, тем ни менее, является мощным инструментом качественного анализа поведения частиц и в этом случае, так как конфигурация потенциальной энергии определяется только источником поля и не зависит от движения частиц. Очевидно, что если частица теряет энергию в процессе излучения, она переходит в состояния с более низкой энергией. Следовательно, граница допустимой области изменяется со временем, сдвигая частицу вниз по склону потенциальной энергии.

Тот факт, что в случае $\omega \cdot \mu > 0$ отрицательно заряженные частицы концентрируются в полярных областях наклонного ротатора и частицы с положительным зарядом в экваториальной зоне, согласуется с выводами других авторов которые использовали различные модели для магнитосферы нейтронной звезды (см., например, [21, 36, 37]).

Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы для исследования радиационных поясов в окрестности конкретных небесных тел, магнитная ось которых не совпадает с осью вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Störmer C. The Polar Aurura. Oxford: Oxford at the Clarendon Press, 1955. 403 p.
2. Van Allen J.A., Frank L.A. Radiation Around the Earth to a Radial Distance of 107,400 km // Nature. 1959. Vol. 183. P. 430–434. doi:10.1038/183430a0.
3. Dragt A.J. Trapped Orbits in a Magnetic Dipole Field // Rev. Geophys. 1965. Vol. 3(2). P. 255–298.
4. Dragt A.J., Finn J.M. Insolubility of Trapped Particle Motion in a Magnetic Dipole Field // J. Geophys. Res. 1976. Vol. 81. P. 2327–2340.
5. Epp V., Masterova M.A. Effective potential energy in Störmer's problem for an inclined rotating magnetic dipole // Astrophys. Space Sci. 2013. Vol. 345. P. 315–324.
6. Epp V., Masterova M.A. Effective potential energy for relativistic particles in the field of inclined rotating magnetized sphere // Astrophys. Space Sci. 2014. Vol. 353. P. 473–483.
7. Deutsch A.J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo // Ann. d'Astrophys. 1955. Vol.18. P. 1–10.
8. Michel F.C. Theory of Neutron Star Magnetospheres. Chicago: The University of Chicago Press, 1991. 287 p.
9. Babcock H.W., Cowling T.G. General Magnetic Fields in the Sun and Stars // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1953. Vol. 113. P. 357–481.
10. Cohen J.M., Rosenblum A. Pulsar magnetosphere // Astrophys. Space Sci. 1972. Vol. 16. P. 130–328.
11. Kaburaki O. Determination of the electromagnetic field produced by a magnetic oblique rotator // Astrophys. Space Sci. 1981. Vol. 74. P. 333–356.
12. Cohen J.M., Kearney M.W. Neutron star electrostatics in curved space // Astrophys. Space Sci. 1980. Vol. 70. P. 295–328.

13. Бескин В.С., Гуревич А.В., Истомин Я.Н. Электродинамика магнитосферы пульсара // *ЖЭТФ*. 1983. Т. 85. С. 401–433.
14. Бескин В.С., Желтоухов А.А. Аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме // *УФН*. 2014. Т. 184. С. 865–873.
15. Sarychev V.T. Electromagnetic field of a rotating magnetic dipole and electric-charge motion in this field // *Radiophys. Quant. Electr.* 2009. Vol. 52. P. 900–907.
16. Ferrari A. and Trussoni E. Pulsed high-energy radiation from oblique magnetic rotators // *Astrophys. Space Sci.* 1975. Vol. 33. P. 111–126.
17. Finkbeiner B., Ertl T., Herold H., Ruder H. Particle Motion in Pulsar Magnetospheres // *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft*. 1987. Vol. 70. P. 375–376.
18. Thielheim K.O., Wolfsteller H. Particle trapping near a parallel rotator // *J. Phys. A*. 1990. Vol. 23. P. 583–593.
19. Thielheim K.O., Wolfsteller H. Charged particle dynamics near the force-free surface of a rotating magnetized sphere // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1986. Vol. 71. P. 583–593.
20. Dullin H. R., Horanyi M., Howard J.E. Generalizations of the Stormer problem for dust grain orbits // *Phys. D*. 2002. Vol. 171. P. 178–195.
21. Истомин Я. Н., Собьянин Д.Н. Заполнение плазмой магнитосферы нейтронных звезд: динамика движения электронов и позитронов // *ЖЭТФ*. 2009. Т. 136. № 3(9). С. 458–475.
22. Thielheim K.O., Wolfsteller H. Charged particle dynamics near the force-free surface of a rotating magnetized sphere // *Astrophys. J. Suppl. Series*. 1989. Vol. 71. P. 583–593.
23. Pacini L. M. Energy Emission from a Neutron Star // *Nature*. 1967. Vol. 216. P. 567–568.
24. Ostriker J.P., Gunn J.E. On the Nature of Pulsars. I. Theory // *Astrophys. J.* 1969. Vol. 157. P. 1395–1417.
25. Belinsky V., De Paolis F., Lee H.W. and Ruffini R. Radiation from a relativistic rotating magnetic dipole: magnetic synchrotron effect // *Astron. Astrophys.* 1994. Vol. 283. P. 1018–1024.
26. Belinsky V. and Ruffini R. Radiation from a relativistic magnetized star // *ApJ*. 1992. Vol. 401. P. L27–L29.
27. Georgiou A. A rapidly rotating perfectly conducting sphere and the electrodynamics of a neutron star // *Il Nuovo Cim. B*. 2008. Vol. 123. P. 201–215. DOI:10.1393/ncb/i2008-10534-6.
28. Rezzolla L., Ahmedov B.J. and Miller J.C. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - I. Formulation of the equations // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2001. Vol. 322. P. 723–740.
29. Kaburaki O. Determination of the electromagnetic field produced by a magnetic oblique-rotator // *Astrophys. Space Sci.* 1980. Vol. 67. P. 3–18.
30. Redzic D.V. Electromagnetostatic charges and fields in a rotating conducting sphere // *Progress In Electromagnetic Research*. 2010. Vol. 110. P. 383–401.
31. Swann W.F.G. Unipolar induction // *Phys. Rev.* 1920. Vol. 15. P. 365–398.
32. Schmutzer E. Electromagnetic field of a rotating permanently magnetized sphere in the inertial and the comoving frames of reference // *Asta Physica Polonica*. 1979. Vol. B 10. P. 515–524.
33. Ferrari A., Trussoni E. Magnetic fields around highly magnetized objects // *Astrophys. Space Sci.* 1973. Vol. 24. P. 3–15.
34. Merkin R.M. Introduction to the theory of stability. NY: Springer. 1996. 319 p.
35. Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N. Physics of the pulsar magnetosphere. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1993. 408 p.
36. Jackson E.A. A new pulsar atmospheric model. I. Aligned magnetic and rotational axes // *Astrophys. J.* 1976. Vol. 206. P. 831–841.
37. Gold T. Rotating Neutron Stars as the Origin of Pulsating Radio Source // *Nature*. 1968. Vol. 218. P. 731.

Поступила в редакцию 25.07.2015

Мастерова Мария Александровна, к. ф.-м. н., кафедра комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40.
E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

Эпп Владимир Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Томский государственный педагогический университет, 634061, Россия, г. Томск, ул. Киевская, 60.
E-mail: epp@tspu.edu.ru

M. A. Masterova, V. Ya. Epp

Dynamics of a charged particle in the field of rotating magnetized celestial body

Keywords: radiation belts, dipole field, magnetosphere, particle dynamics, planets, stars.

PACS: 97.10.Ld, 94.30.Xy

Dynamics of a charged particle in the electromagnetic field of a rotating magnetized celestial body with an inclined axis of the magnetic field is investigated. The total energy of a charged particle in the field of an arbitrary source, rotating with constant angular velocity ω does not depend on time. This makes it possible to introduce effective potential energy

$$V(r, \theta, \psi) = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin^2 \theta} + \frac{e}{mc^2} A_0(r, \theta, \psi)$$

and to study the particle motion in this field (r, θ, ψ are the spherical coordinates and A_0 is the temporal component of 4-vector potential; all variables correspond to the co-rotating reference frame). Closed regions where the motion of a charged particle is allowed are determined by use of such approach. The conditions of existence of such “radiation belts” are defined, and the geometry of these areas is explored. Two types of electromagnetic field are considered — the field of a magnetic dipole and the field of a uniformly magnetized and perfectly conducting sphere. In both cases there are closed areas of space, where the charged particles with energy below a certain value can be captured. If the angle between the vector of the magnetic moment and the angular velocity vector is acute, then such region for the positively charged particles is located in the vicinity of the magnetic equator and has a torus-like form. For the negatively charged particles the potential valley is located in the area of magnetic poles and is stretched out along the magnetic axis. If the outlined angle is obtuse, the potential valleys for the positive and negative charges interchange their positions. In the case of a dipole magnetic field the trapping regions are adjacent to the surface of the magnetized sphere and do not have a minimum, however in the case of perfectly conducting sphere there are minima of potential energy separated from the body surface, both for the positively and negatively charged particles.

REFERENCES

1. Störmer C. *The Polar Aurora*. Oxford: Clarendon Press, 1955, 403 p.
2. Van Allen J.A., Frank L.A. Radiation Around the Earth to a Radial Distance of 107,400 km. *Nature*, 1959, vol. 183, pp. 430–434, doi:10.1038/183430a0.
3. Dragt A.J. Trapped Orbits in a Magnetic Dipole Field, *Rev. Geophys.*, 1965, vol. 3(2), pp. 255–298.
4. Dragt A.J., Finn J.M. Insolubility of Trapped Particle Motion in a Magnetic Dipole Field *J. Geophys. Res.*, 1976, vol. 81, pp. 2327–2340.
5. Epp V., Masterova M.A. Effective potential energy in Störmer’s problem for an inclined rotating magnetic dipole, *Astrophys. Space Sci.*, 2013, vol. 345, pp. 315–324.
6. Epp V., Masterova M.A. Effective potential energy for relativistic particles in the field of inclined rotating magnetized sphere, *Astrophys. Space Sci.*, 2014, vol. 353, pp. 473–483.
7. Deutsch A.J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo, *Ann. d’Astrophys.*, 1955, vol.18, pp. 1–10.
8. Michel F.C. *Theory of Neutron Star Magnetospheres*. Chicago: Univ. Chicago Press, 1991, 287 p.
9. Babcock H.W., Cowling T.G. General Magnetic Fields in the Sun and Stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1953, vol. 113, pp. 357–481.
10. Cohen J.M., Rosenblum A. Pulsar magnetosphere, *Astrophys. Space Sci.*, 1972, vol. 16, pp. 130–328.
11. Kaburaki O. Determination of the electromagnetic field produced by a magnetic oblique rotator, *Astrophys. Space Sci.*, 1981, vol. 74, pp. 333–356.
12. Cohen J.M., Kearney M.W. Neutron star electrostatics in curved space, *Astrophys. Space Sci.*, 1980, vol. 70, pp. 295–328.
13. Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. Electrodynamics of pulsar magnetospheres, *Soviet Physics - JETP*, 1983, vol. 58, pp. 235–253.
14. Beskin V S, Zheltoukhov A A. On the anomalous torque applied to a rotating magnetized sphere in a vacuum, *Phys. Usp.*, 2014, vol. 57, pp. 799–806.
15. Sarychev V.T. Electromagnetic field of a rotating magnetic dipole and electric-charge motion in this field, *Radiophys. Quant. Electr.*, 2009, vol. 52, pp. 900–907.
16. Ferrari A., Trussoni E. Pulsed high-energy radiation from oblique magnetic rotators, *Astrophys. Space Sci.*, 1975, vol. 33, pp. 111–126.
17. Finkbeiner B., Ertl T., Herold H., Ruder H. Particle Motion in Pulsar Magnetospheres, *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft*, 1987, vol. 70, pp. 375–376.
18. Thielheim K.O., Wolfstetter H. Particle trapping near a parallel rotator, *J. Phys. A*, 1990, vol. 23, pp. 583–593.

19. Thielheim K.O., Wolfsteller H. Charged particle dynamics near the force-free surface of a rotating magnetized sphere, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1986, vol. 71, pp. 583–593.
20. Dullin H. R., Horanyi M., Howard J.E. Generalizations of the Sturmer problem for dust grain orbits, *Phys. D*, 2002, vol. 171, pp. 178–195.
21. Istomin, Ya. N. Sobyaniin D. N. The filling of neutron star magnetospheres with plasma: Dynamics of the motion of ,electrons and positrons, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2009, vol. 109, pp. 393-407.
22. Thielheim K.O., Wolfsteller H. Charged particle dynamics near the force-free surface of a rotating magnetized sphere, *Astrophys. J. Suppl. Series.*, 1989, vol. 71, pp. 583–593.
23. Pacini L. M. Energy Emission from a Neutron Star, *Nature*, 1967, vol. 216, pp. 567–568.
24. Ostriker J.P., Gunn J.E. On the Nature of Pulsars. I. Theory, *Astrophys. J.*, 1969, vol. 157, pp. 1395–1417.
25. Belinsky V., De Paolis F., Lee H.W., Ruffini R. Radiation from a relativistic rotating magnetic dipole: magnetic synchrotron effect, *Astron. Astrophys.*, 1994, vol. 283, pp. 1018–1024.
26. Belinsky V., Ruffini R. Radiation from a relativistic magnetized star, *ApJ*, 1992, vol. 401, pp. L27–L29.
27. Georgiou A. A rapidly rotating perfectly conducting sphere and the electrodynamics of a neutron star, *Il Nuovo Cim. B*, 2008, vol. 123, pp. 201–215, DOI:10.1393/ncb/i2008-10534-6.
28. Rezzolla L., Ahmedov B.J., Miller J.C. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - I. Formulation of the equations, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2001, vol. 322, pp. 723–740.
29. Kaburaki O. Determination of the electromagnetic field produced by a magnetic oblique-rotator, *Astrophys. Space Sci.*, 1980, vol. 67, pp. 3–18.
30. Redzic D.V. Electromagnetostatic charges and fields in a rotating conducting sphere, *Progress In Electromagnetic Research.*, 2010, vol. 110, pp. 383–401.
31. Swann W.F.G. Unipolar induction, *Phys. Rev.*, 1920, vol. 15, pp. 365–398.
32. Schmutzer E. Electromagnetic field of a rotating permanently magnetized sphere in the inertial and the comoving frames of reference, *Asta Physica Polonica.*, 1979, vol. B 10, pp. 515–524.
33. Ferrari A., Trussoni E. Magnetic field around highly magnetized objects, *Astrophys. Spase Sci.*, 1973, vol. 24, pp. 3–15.
34. Merkin R.M. *Introduction to the theory of stability*. NY: Springer, 1996, 319 p.
35. Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N. *Physics of the pulsar magnetosphere*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993, 408 p.
36. Jackson E.A. A new pulsar atmospheric model. I. Aligned magnetic and rotational axes, *ApJ*, 1976, vol. 206, pp. 831–841.
37. Gold T. Rotating Neutron Stars as the Origin of Pulsating Radio Source, *Nature*, 1968, vol. 218, pp. 731–731.

Received 25.07.2015

Masterova Maria Aleksandrovna, PhD in Physics and Mathematics, Department of Complex Security of Electronic Information Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, pr. Lenina, 40, Tomsk, 634050, Russia.

E-mail: kolesnikova_ma88@mail.ru

Epp Vladimir Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Physics, Tomsk State Pedagogical University, ul. Kievskaya, 60, Tomsk, 634061, Russia.

E-mail: epp@tspu.edu.ru