УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА И ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ [2]

Рассмотрена теория релятивистски инвариантных функций сингулярных источников, определяемых мировыми линими частиц, и техника вычислений с этими функциями, позволяющая значительно упростить и сделать явно ковариантными некоторые вычисления в теории поля и релятивистской кинетике.

Ключевые слова: δ-функции Дирака, инвариантные функции источников, теория поля, релятивистская кинетика.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Введение

Вычисления, проводимые в классических релятивистских теориях поля, релятивистской статистике требуют привлечения понятий обобщенных функций, в частности, δ-функции Дирака. При этом такие вычисления проводятся в большинстве работ с привлечением выделенных систем отсчета и соответствующих им координатных систем, что часто нарушает, по-крайней мере, внешне ковариантный и инвариантный характер проводимых вычислений и делает их зачастую громоздкими и запутанными. За примерами далеко ходить не надо – достаточно взять практически любой учебник по электродинамике в части нахождения решений уравнений Максвелла для заряженных частиц. Между тем, эти вычисления можно значительно упростить, сделать их наглядными и понятными, вводя так называемые инвариантные функции источников. Изложение основ электродинамики с помощью этих функций содержится, например, в курсе Автора [1].

2. Уравнения движения частиц

Выпишем основные соотношения канонической и Лагранжевых формулировок уравнений движения релятивистской частицы, имеющей скалярный, q, и векторный, e, заряды [4, 9].

2.1. Общие соотношения

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид:

$$\frac{dx^i}{ds}=\frac{\partial H}{\partial P_i};\qquad \frac{dP_i}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{2.1}$$

где $H(x,P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона, $u^i=dx^i/ds$ – вектор скорости частицы.

Вследствие антисимметричности канонических уравнений движения (2.1) и симметричности фазового объема выполняется дифференциальное соотношение [6], в классической динамике известное как *теорема Лиувилля*

$$\frac{d\Gamma}{ds}=0, \tag{2.2}$$

согласно которому фазовый объем мировой трубки частиц постоянен. Полная производная от функции динамических переменных $\Psi(x^i,P_k)$ выражается с помощью скобки Пуассона:

$$\frac{d\Psi}{ds}=[H,\Psi]\equiv\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}-\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi}{\partial P_i}\ . \tag{2.3}$$

---

[1] E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2] This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

В явно ковариантной форме скобка Пуассона с помощью оператора ковариантного дифференцирования по Картану [7], $\widetilde{\nabla}_i$, имеет вид [6]:

$$\widetilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma^k_{ij} P_k \frac{\partial}{\partial P_j}, \tag{2.4}$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля 2-го рода относительно метрики g_{ij} базы X. Оператор $\widetilde{\nabla}$ определен таким образом, что

$$\widetilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \tag{2.5}$$

и выполняется следующее *символическое* правило дифференцирования функций:

$$\widetilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [\Psi(x], P), \tag{2.6}$$

которое означает, что для вычисления производной Картана от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить от нее обычную ковариантную производную так, как если бы вектор импульса был ковариантно постоянным. Таким образом, в явно ковариантном виде скобка Пуассона есть:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \widetilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \widetilde{\nabla}_i H, \tag{2.7}$$

Вследствие (2.3) функция Гамильтона является интегралом движения частицы:

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0, \Rightarrow H = \mathrm{Const}\,. \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) можно назвать соотношением нормировки.

2.2. Канонические уравнения движения скалярно и векторно заряженной частицы

Функция Гамильтона для скалярно и векторно заряженной частицы и соотношение нормировки (2.8) для обобщенного импульса имеют вид:

$$H(x, P) = \frac{1}{2}\left[\frac{g^{ik}(P_i - eA_i, P_k - eA_k)}{m_*} - m_*\right] = 0, \tag{2.9}$$

$$\Rightarrow (P - eA, P - eA) = m_*^2, \tag{2.10}$$

где A_i – векторный потенциал, $m_*(\Phi)$ – эффективная масса частицы. Таким образом, вследствие канонических уравнений (2.1) получим для вектора 4-скорости:

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = \frac{P^i - eA^i}{m_*}, \tag{2.11}$$

что позволяет ввести *кинематический импульс*:

$$p^i = m_* u^i \equiv P^i - eA^i. \tag{2.12}$$

Тогда вследствие (2.10) выполняются стандартные соотношения нормировки этих величин:

$$(u, u) = 1; \tag{2.13}$$

$$(p, p) = m_*^2. \tag{2.14}$$

Отметим полезные в дальнейшем тождества, справедливые для функции Гамильтона (2.9):

$$\widetilde{\nabla}_i H = -\nabla_i m_* - \frac{e}{m_*} p^k A_{k,i}, \tag{2.15}$$

$$[H, \Psi] = \frac{1}{m_*} p^i \widetilde{\nabla}_i \Psi + \left(\partial_i m_* + \frac{e}{m_*} p^k A_{k,i}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \tag{2.16}$$

где $\Psi(x, P)$ есть произвольная функция. В частности:

$$[H, P^i] = \nabla^i m_* + \frac{e}{m_*} p^k \nabla^i A_k. \tag{2.17}$$

2.3. Уравнения движения в Лагранжевой формулировке

Из первой и второй группы канонических уравнений (2.1) получаются уравнения движения в Лагранжевой формулировке [8]:

$$m_*\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)=\partial_k m_*\mathcal{P}^{ik}+eF^i_{\ k}\frac{dx^k}{ds}, \tag{2.18}$$

где F_{ik} – тензор Максвелла, а:

$$\mathcal{P}^{ik}=\mathcal{P}^{ki}=g^{ik}-u^iu^k \tag{2.19}$$

– тензор ортогонального проектирования на направление u, такой что:

$$\mathcal{P}^{ik}u_k\equiv 0;\quad \mathcal{P}^{ik}g_{ik}\equiv 3. \tag{2.20}$$

Из этих соотношений и уравнений Лагранжа (2.18) вытекает строгое следствие ортогональности векторов скорости и ускорения:

$$g_{ik}u^i\frac{du^k}{ds}\equiv 0. \tag{2.21}$$

3. Инвариантная микроскопическая фазовая плотность

3.1. Инвариантная $delta$ *- функция в фазовом пространстве*

Как происходит перенос динамических величин, определенных на точечных объектах (частицах), на непрерывное многообразие? Как и всегда в подобных случаях такой перенос осуществляется с помощью δ - функции. Введем *инвариантные микроскопические фазовые плотности* системы, состоящей из N_A тождественных частиц (см., например, [2], [3]) :

$$\underset{A}{\mathcal{N}}(\eta)=\sum_{\alpha=1}^{N_A}\int\delta[\eta;\overset{(\alpha)}{\underset{(A)}{\eta}}(s_\alpha)]ds_\alpha\,, \tag{3.1}$$

где интегрирование проводится по всей фазовой траектории каждой α - той частицы. Во избежании путаницы с индексами в дальнейшем договоримся об обозначениях частиц. Произвольную частицу в дальнейшем будем обозначать: $\overset{(\alpha)}{\underset{(A)}{a}}$, где $\alpha=\overline{1,N}$ - номер частицы, $A=\overline{1,n}$ - индекс сорта частицы (бухгалтерский индекс). Когда записываются конкретные реакции, индекс сорта опускается, и вместо, например, $\underset{(1)}{a}$ пишется: e (электрон); $\underset{(2)}{a}$ пишется: p (протон) и т.д.. Тогда динамические переменные частицы будем записывать в виде:

$$\overset{(\alpha)}{\underset{(A)}{\eta}}{}_J=\{\overset{(\alpha)}{\underset{(A)}{x}}{}^i,\overset{(\alpha)}{\underset{(A)}{\mathrm{P}}}{}_i\} \tag{3.2}$$

Во избежании слишком громоздких многоиндексных величин некоторые индексы в дальнейшем будем опускать. Далее в (3.1) $\delta[\eta;\eta^\alpha(s_\alpha)]$ - симметричная инвариантная 8-ми мерная δ - функция, определенная на фазовом пространстве Γ^α и изоморфном ему Γ, так что:

$$\int\limits_{\Gamma^\alpha}\psi(\eta^\alpha)\delta[\eta;\eta^\alpha]d\Gamma^\alpha=\psi(\eta)\,;$$

$$\int\limits_{\Gamma}\psi(\eta)\delta[\eta;\eta^\alpha]d\Gamma=\psi(\eta^\alpha)\,. \tag{3.3}$$

Так как фазовое пространство является расслоением, то и 8-мерная δ - функция распадается на произведение двух четырехмерных δ - функций:

$$\delta[\eta;\eta^\alpha]=\mathcal{D}(x;x^\alpha)\delta^{(4)}(\mathrm{P}-\mathrm{P}^\alpha)\,, \tag{3.4}$$

так что:

$$\int\limits_{\mathrm{P}(X)} \psi(x,\mathrm{P})\delta^{(4)}(\mathrm{P}-\mathrm{P}^{\alpha})d\mathrm{P} = \psi(x,\mathrm{P}^{\alpha})\,, \tag{3.5}$$

где импульс P^{α} теперь уже приложен к точке $x \in X$. Далее:

$$\int\limits_{X} F(x)D(x;x^{\alpha})dX = F(x^{\alpha})\,. \tag{3.6}$$

Определенная таким способом 8-ми мерная δ - функция инвариантна по отношению к преобразованиям фазового пространства.

3.2. Инвариантная фазовая плотность

Релятивистски - инвариантная 7-мерная δ - функция *с исключенным собственным временем частицы*, определяющая микроскопическую фазовую плотность (3.1):

$$\Delta_{\alpha}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}_{\alpha}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta[\eta,\eta_{\alpha}(s_{\alpha})]ds_{\alpha} \tag{3.7}$$

и называемая *случайной функцией*, была впервые введена в релятивистскую статистику А. Стратоновичем[3].

Итак, имеет место соотношение:

$$\underset{A}{\mathcal{N}}(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{N_A} \Delta_{\alpha}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}_{\alpha})\,. \tag{3.8}$$

Введем в X_4 поле наблюдателей, ассоциированных с единичным времениподобным вектором $u^i(x)$:

$$(u,u) = 1\,, \tag{3.9}$$

по часам которых будем производить измерения. Для синхронизации часов наблюдателей необходима геодезичность поля $u^i(x)$:

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0\,, \tag{3.10}$$

где τ - синхронизованное собственное время наблюдателей, к мировым линиям которых касателено векторное поле $u^i(x)$. Гиперповерхность $\tau = \mathrm{Const}$, ортогональная полю наблюдателей $u^i(x)$:

$$u_i dx^i = 0\,, \tag{3.11}$$

является пространственноподобной. В дальнейшем будем обозначать эту гиперповерхность символом V; векторный элемент ее площади равен:

$$d\Sigma_i = u_i dV\,, \tag{3.12}$$

где dV инвариантный элемент объема на V:

$$dV = \sqrt{-\tilde{g}}\, d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3\,, \tag{3.13}$$

а $\tilde{x}^{\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,3})$ - внутренние координаты гиперповерхности V.

Вычислим интеграл по гиперповерхности V от случайной функции (3.7). Заметим сначала, что

$$dX = dV d\tau\,, \tag{3.14}$$

[3] На этот факт указано в работе Ю.Л. Климонтовича [3], но ссылки на саму работу А. Стратоновича Автору найти не удалось. Юрий Львович Климонтович в ответ на просьбу Автора сообщил, что работа Стратоновича так и не была опубликована.

где линии τ являются касательными к векторному полю $u^i(x)$. Поэтому в данной системе отсчета случайная функция (3.7) принимает вид:

$$\Delta(\tilde{\eta},\tilde{\eta}_\alpha)=\frac{1}{\big(u,p_\alpha(s^*_\alpha)\big)}\delta^{(3)}(\tilde{x};\tilde{x}_\alpha)\delta^{(4)}\left(\mathrm{P}-\mathrm{P}_\alpha(s^*_\alpha)\right)\,, \tag{3.15}$$

где $\tilde{x}$ - внутренние координаты гиперповерхности $V:\tau=\mathrm{Const}$, а $s^*_\alpha(\tau)$ - момент собственного времени частицы, соответствующего пересечению ею гиперповерхности $\tau=\mathrm{Const}$. Таким образом, в конечном итоге:

$$\tilde{x}_\alpha=\tilde{x}_\alpha(\tau)\,;\quad \tilde{\mathrm{P}}_\alpha=\tilde{\mathrm{P}}_\alpha(\tau)\,, \tag{3.16}$$

где переменные $\tilde{\eta}_\alpha(\tau)$ являются решениями канонических уравнений движения (2.1) с последующим исключением канонического параметра: $s_\alpha=s*_\alpha(\tau)$. Момент времени τ определяется из решения дифференциального уравнения (3.10).

Действительно, заметим, что канонические уравнения движения частиц (2.1) после исключения канонического параметра s можно представить в виде уравнений характеристик:

$$\frac{dx^1}{p^1}=\cdots=\frac{dx^4}{p^4}=\frac{d\mathrm{P}_1}{-\,\widetilde{\nabla}_1\,\mathcal{H}}=\cdots=\frac{d\mathrm{P}_4}{-\,\widetilde{\nabla}_4\,\mathcal{H}}\qquad(=ds)\,, \tag{3.17}$$

где:

$$p^i=m_*\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathrm{P}_i}\,.$$

Система уравнений движения (3.17) допускает 7 независимых интегралов:

$$F_r(x,\mathrm{P})=C_r\,;\qquad(r=\overline{0,6})\,, \tag{3.18}$$

одним из которых, C_0, всегда является интеграл массы. При фиксированной массе покоя частиц, m_0, система уравнений (3.17) определяет в фазовом пространстве Γ 6-параметрическое семейство фазовых траекторий. Разрешая эти уравнения, в системе координат, в которой $x^4=\tau$, относительно времени наблюдателей τ, мы получим $(i=\overline{1,3})$:

$$\left.\begin{array}{lcl} x^i=x^i(\tau) & \stackrel{def}{=} & \tilde{x}^i\\ \mathrm{P}_i=\mathrm{P}_i(\tau) & \stackrel{def}{=} & \tilde{\mathrm{P}}_i\\ H=0 & \to & \tilde{\mathrm{P}}_4 \end{array}\right\}=\tilde{\eta}(\tau)\,. \tag{3.19}$$

Интегрируя затем любую связь в системе (3.17), мы найдем $s_*(\tau)$. Именно в этом смысле и надо понимать соотношение (3.15), а также и аналогичные ему нижеследующие.

4. Инвариантные функции источников и их свойства

Инвариантной симметричной двухточечной δ-функцией Дирака, определенной на n-мерном римановом многообразии R, назовем функцию $\mathcal{D}(x_1|x_2)$, обладающими следующими свойствами:

$$\int\limits_{X_2}\mathcal{D}(x_1|x_2)F(x_2)dX_2=\left\{\begin{array}{ll}F(x_1); & x_1\in X_2,\\ 0; & x_2\notin X_2,\end{array}\right. \tag{4.1}$$

$(X_2\subset R)$; $F(x)$ - произвольное тензорное поле, $dX=\sqrt{-g(x)}dx^1\ldots dx^n$ - инвариантный элемент объема R).

$$\mathcal{D}(x_1|x_2)=\mathcal{D}(x_2|x_1); \tag{4.2}$$

$$\mathcal{D}(x'_1|x'_2)=\mathcal{D}(x_1|x_2), \tag{4.3}$$

если $x^{i'}=\varphi^i(x^1,\ldots,x^n)$- невырожденное преобразование координат

$$J=\mathrm{Det}\left\|\frac{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}'}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{k}}}\right\|\neq0. \tag{4.4}$$

Наряду с инвариантной δ - функцией можно рассматривать и скалярную плотность $\Delta(x_1|x_2)$, которую обычно и называют δ- функцией Дирака, -

$$\Delta(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{-g(x_2)}}\mathcal{D}(x_1|x_2) \tag{4.5}$$

с законом преобразования:

$$\Delta(x_1'|x_2') = |J^{-1}(x_2)|\Delta(x_1|x_2). \tag{4.6}$$

Рассмотрим выражение вида

$$\int\limits_R F(x)\mathcal{D}[\psi(x)|0]dx \equiv \int\limits_R F(x)\Delta[\psi(x)|0]d^n x, \tag{4.7}$$

где $\psi^a(x)$- однозначные функции x, причем

$$J(\psi) = \mathrm{Det}\left\|\frac{\partial \mathrm{x^k}}{\partial \psi^\mathrm{a}}\right\| \neq 0.$$

Последнее условие позволяет нам выбрать ψ^a в качестве новых координат и преобразовать интеграл к виду

$$\int\limits_\psi F[x(\psi)]\Delta(\psi|0)dx|J(\psi)|d^n\psi$$

и, согласно (4.1), получить формулу

$$\int\limits_R F(x)\mathcal{D}(\psi(x)|0)dx = \sum_a |J[\psi(x_a)]\,|\,F(x_a), \tag{4.8}$$

которую можно записать в виде символического правила

$$\mathcal{D}(\psi(x)\,|\,0) = \sum_a |J[\psi(x_a)]|\,\mathcal{D}(x\,|\,x_a), \tag{4.9}$$

где x_a- корни уравнения $\psi(x) = 0$;

$$J[\psi(x_a)] = \mathrm{Det}^{-1}\left\|\frac{\partial\psi^6}{\partial \mathrm{x_a^i}}\right\|.$$

Формула (4.9) является обобщением хорошо известного свойства одномерной δ- функции Дирака:

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_a |\varphi'(x_a)|^{-1}\,\delta(x - x_a). \tag{4.10}$$

Если в некоторой системе координат R представимо в виде прямого произведения трехмерной неизотропной гиперповерхности V_k и нормальной к ней в каждой точке конгруэнции координатных линий x_k, то в этой системе координат δ- функцию Дирака можно представить в виде произведения инвариантной на гиперповерхности V_k трехмерной δ- функции $\mathcal{D}(\tilde{x}_1\,|\,\tilde{x}_2)$ и одномерной δ- функции $\delta(\underset{k}{x_1}|\,\underset{k}{x_2})$

$$\mathcal{D}(x_1\,|\,x_2) = \mathcal{D}(\tilde{x}_1|\,\tilde{x}_2)\delta(\underset{k}{x_1}|\,\underset{k}{x_2}) \tag{4.11}$$

где $\tilde{x}$ - координаты на V_k. В этой системе координат элемент объема R также представляется в виде произведения $dX = dV_k dx_k$, где $dV_k = \sqrt{-g(x)}d^{n-1}\tilde{x}$ - элемент площади гиперповерхности V_k. В дальнейшем мы часто будем производить такую операцию в синхронной системе отчета, когда нормальный вектор k_i времениподобен. Метрика R в этой системе отсчета имеет вид

$$ds^2 = d\tau^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3). \tag{4.12}$$

В этом случае 3-мерная гиперповерхность является пространственноподобной, элемент площади ее будем обозначать посредством dV.

Рассмотрим производные от δ- функции. Распространяя интегрирование в (4.1) на все пространство и дифференцируя это соотношение, имеем

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1^i} = \int\limits_R F(x_2)\frac{\partial \mathcal{D}(x_1\,|\,x_2)}{\partial x_1^i} dX_2.$$

С другой стороны, по определению

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1^i} = \int\limits_R \frac{\partial F(x_2)}{\partial x_2^i}\mathcal{D}(x_1\,|\,x_2) dX_2.$$

Сравнивая эти выражения, найдем символическое правило дифференцирования инвариантной δ - функции Дирака

$$\frac{\partial}{\partial x_1^i}\mathcal{D}(x_1\,|\,x_2) = \mathcal{D}(x_1\,|\,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2^i}. \tag{4.13}$$

Повторив аналогичные выкладки для тензорного объекта $F(x)$, получим более общее правило дифференцирования

$$\overset{1}{\nabla}_i\ \mathcal{D}(x_1\,|\,x_2) = \mathcal{D}(x_1\,|\,x_2)\ \overset{2}{\nabla}_i, \tag{4.14}$$

где $\overset{a}{\nabla}_i$ - оператор ковариантного дифференцирования в точке x_a.

5. Тензорные функции источника классической частицы

5.1. Сингулярные функции источника частицы

Геометрическим образом частицы является времениподобная мировая линия $x^i = x^i(s_a) \equiv x^i_a$, вдоль которой задан некоторый геометрический объект $\omega_a(x_a) \equiv \omega_a(s_a)$, характеризующий ее физические свойства. Будем называть этот объект источником. Классической точечной частице поставлен в соответствие лишь один тензорный объект[4]- вектор скорости $u^i_a = dx^i_a/ds_a$ и некоторые скалярные «заряды». При учете лишь электромагнитных и гравитационных взаимодействий заряды постоянны $-m_a$ (масса), e_a (электрический заряд). Таким образом, источник классической частицы может иметь лишь структуру вида $\omega_a(s_a) = \{1, e_a, m_a\}\times u^{i_1}_a \ldots u^{in}_a$. Определим поле плотности источника

$$\Omega_a(x) = \int\limits_{\substack{\text{Вдоль всей}\\ \text{траектории}}} \omega_a(s_a)\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a. \tag{5.1}$$

Вследствие определения инвариантной δ- функции интегрирование в (5.1) переносит тензорные свойства объекта ω_a с траектории частицы на все многообразие R, задавая тензорное поле $\Omega_a(x)$.

Введем в рассмотрение следующие плотности источников, имеющие простой физический смысл:

$$n^i(x) = \sum n^i_a(x) = \sum_a \int u^i_a(s_a)\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a \tag{5.2}$$

– вектор плотности числа частиц (числовой вектор),

$$j^i(x) = \sum e_a c n^i_a(x) = \sum_a e_a c \int u^i_a(s_a)\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a \tag{5.3}$$

– вектор плотности тока,

$$T^{ik}_p(x) = \sum T^{ik}_a(x) = \sum_a m_a c^2 \int u^i_a(s_a)u^k_a(s_a)\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a \tag{5.4}$$

– тензор энергии-импульса частиц без учета взаимодействующих полей (тензор энергии-импульса голых частиц).

[4]Квантовой частице в квазиклассическом представлении может быть поставлен в соответствие также спинор, определенный на траектории.

5.2. Дифференциальные законы сохранения

Вычислим ковариантные дивергенции от этих величин. Сначала рассмотрим выражение вида

$$\nabla_i n_a^i(x) = \int\limits_S u_a^i(s_a)\frac{\partial\mathcal{D}(x\,|\,x_a)}{\partial x^i}ds_a.$$

Представим интеграл в этом выражении как криволинейный интеграл 2-го типа, взятый вдоль всей траектории частицы:

$$\nabla_i n_a^i(x) = \int\limits_S \frac{\partial\mathcal{D}(x\,|\,x_a)}{\partial x^i}dx_a^i.$$

Учтем символическое правило (4.13), согласно которому оператор должен действовать в нашем случае на единицу. Таким образом, всегда имеет место соотношение

$$\nabla_i n_a^i(x) = \int\limits_S u_a^i(s_a)\frac{\partial\mathcal{D}(x\,|\,x_a)}{\partial x^i}ds_a = 0. \tag{5.5}$$

Это соотношение имеет вид закона сохранения и устанавливает очевидный факт существования частицы на ее же собственной траектории. Вследствие (5.5) выполняются законы сохранения:

$$\nabla_i n^i(x) = 0; \tag{5.6}$$

$$\nabla_i j^{\,i}(x) = 0. \tag{5.7}$$

Для выяснения физического смысла этих законов найдем явное выражение (5.1) в синхронной системе отсчета, в которой, согласно (4.11), координаты $\tilde{x}$ заданы на трехмерной пространственно-подобной V. Вследствие временіподобности вектора скорости u_a^i: $d\tau_a/ds_a \neq 0$, поэтому от интегрирования по собственному времени s_a в (5.1) можно перейти к интегрированию по координатному τ_a. Таким образом, после интегрирования получим

$$\Omega_a(x) = \omega_a(\tau)\frac{\mathcal{D}[\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau)]}{u_a^4(\tau)}, \tag{5.8}$$

где $\tilde{x}_a(\tau)$ означает, что координаты всех частиц взяты в момент τ координатного времени. Соотношение (5.8) может быть записано и в тензорной форме. Заполним все R единичным временіподобным векторным полем наблюдателя

$$(k,k) = 1 \tag{5.9}$$

и будем измерять все события по часам наблюдателей, ассоциированных с полем R. Промежуток времени, измеренный по часам этого наблюдателя, необходимый для бесконечного малого перемещения частицы вдоль ее собственной траектории, есть $d\tau = k_i(x_a)dx_a^i = k_i(x_a)u_a^i(s_a)ds_a$. Таким образом, между интервалами $d\tau$ и ds_a имеется следующая связь:

$$ds_a = \frac{d\tau}{(k,u_a)}. \tag{5.10}$$

При каждом $\tau =$ onst построим пространственноподобную гиперповерхность V, ортогональную полю k_i. Уравнение этой гиперповерхности, как известно, есть

$$k_i(x)dx^i = 0.$$

В результате вместо (5.8) имеем

$$\Omega_a(x) = \omega_a(\tau)\frac{\mathcal{D}[\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau)]}{(k,u_a)_{\tau_a=\tau}}. \tag{5.11}$$

5.3. Интегральные законы сохранения

Проинтегрируем теперь (5.6) по гиперповерхности V, учитывая (5.8), - в результате получим

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\sum \sqrt{-g(\tilde{x})}\frac{u_a^i(\tau)}{u_a^4(\tau)}\mathcal{D}[\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau)]\right\} d^3\tilde{x} = 0.$$

Распишем подробно это выражение, выноса дифференцирование по $\tau = x^4$ за знак интегрирования и вводя вектор 3- скорости частицы на гиперповерхности V: $v_a^\alpha(\tau)/d\tau$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_a \int\limits_V \mathcal{D}(\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau))dV + \int\limits_V \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha}\left\{\sqrt{-\tilde{g}}\sum_a v_a^\alpha(\tau)\mathcal{D}(\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau))\right\} d^3\tilde{x} = 0.$$

Применим ко второму интегралу формулу Гаусса, переходя к интегрированию по замкнутой двумерной поверхности Σ, ограничивающей область V:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_a \int\limits_V \mathcal{D}(\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau))dV = -\iint\limits_\Sigma \sum_a v_a^\alpha(\tau)\mathcal{D}(\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau))d\Sigma_\alpha. \tag{5.12}$$

Вследствие определения δ-функции (4.1) интеграл в левой части (5.12) равен числу частиц, находящихся в трехмерной области V в момент времени τ

$$\sum_a \int\limits_V \mathcal{D}[\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_a(\tau)]dV = N(\tau). \tag{5.13}$$

Интеграл в правой части (5.12) равен потоку числа частиц, пересекающих замкнутую двумерную поверхность $\sum$, ограничивающую трехмерную область V. Таким образом, (5.12) утверждает, что изменение числа частиц в области V вызвано лишь уходом частиц из этой области или приходом частиц в нее - соотношения (5.6), (5.7) являются дифференциальными формами закона сохранения частиц и заряда соответственно.

Вычислим,наконец, ковариантную дивергенцию тензора энергии-импульса голых частиц. Используя соотношения (4.14), (5.5), получим

$$\nabla_k T_p^{ik}(x) = \sum_a m_a c^2 \int u_a^k \overset{a}{\nabla}_k u_a^i \mathcal{D}[x\,|\,x_a(s_a)]ds_a. \tag{5.14}$$

6. Уравнения поля с сингулярными источниками

Уравнения поля для системы частиц, взаимодействующих посредством массивных скалярного (Φ), векторного (A_i) и гравитационного полей, с помощью плотностей источников могут быть записаны в следующем виде

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \varkappa T^{ik} = \varkappa(T_p^{ik} + T_s^{ik} + T_v^{ik}), \tag{6.1}$$

$$F^{ik}_{,k} - \mu_v^2 A^i = -4\pi\sum e_a \int u_a^i \mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a, \tag{6.2}$$

$$\overset{*}{F}{}^{ik}_{,k} = O, \tag{6.3}$$

$$\Box\Phi + \mu_s^2\Phi = -4\pi\sum q_a \int \mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a, \tag{6.4}$$

где

$$T_p^{ik} = \sum m_a c^2\left(1 + \frac{q_a\Phi}{m_a c^2}\right)\int u_a^i u_a^k \mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a \tag{6.5}$$

– тензор энергии-импульса частиц,

$$T_s^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{\Phi^{,i}\Phi^{,k} + \frac{1}{2}g^{ik}(\mu_s^2\Phi^2 - \Phi_{,j}\Phi^{,j})\right\} \tag{6.6}$$

– тензор энергии-импульса массивного скалярного поля[5]

$$T_v^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left\{F^{ij}F_{j\,.}^{\;k} + \frac{\mu_s^2}{2}A^iA^k - \frac{1}{4}(F^{jl}F_{jl} + 2\mu_v^2A^jA_j)g^{ik}\right\} \tag{6.7}$$

– тензор импульсов массивного векторного поля, e_a, q_a- векторный и скалярный заряды частиц, $\mu_v = m_vc/\hbar$, $\mu_s = m_sc/\hbar$; m_v, m_s - масса векторного и скалярного бозонов.

7. Вывод уравнений движения из уравнений поля с сингулярными источниками

Отметим очень красивый факт: уравнения поля (6.1) - (6.4) содержат в себе обычные уравнения движения. Чтобы показать это, применим к обеим частям (6.1) оператор ∇_k и учтем тождества Бианки:

$$0 = \sum_{a=1}^{N}\left\{m_ac^2\left(1 + \frac{q_a\Phi}{m_ac^2}\right)\nabla_k\int u_a^iu_a^k\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a + \right.$$

$$\left. + q_a\Phi_{,k}\int u_a^iu_a^k\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{F^i_{\;.k}(F^{kj}_{\;\;.j} - \mu_v^2A^k) + A^iA^k_{\;,k}\mu_v^2\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\Phi^{,i}(\Box\Phi + \mu_s^2\Phi)\right\}. \tag{7.1}$$

Подействуем оператором ∇_i на обе части уравнения (6.2). Вследствие кососимметричности тензора F^{ik} получим

$$\mu_v^2A^k_{,k} = 4\pi\sum e_a\nabla_k\int u_a^k\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a,$$

и с учетом (5.5) имеем калибровку Лоренца при $\mu_v \not\equiv 0$.

$$A^k_{,k} = 0. \tag{7.2}$$

Используя этот факт, а также уравнения поля (6.2) и (6.4) и соотношение (5.14), приведем (7.1) к виду

$$0 = \sum_{a=1}^{N}\left\{m_ac^2\left(1 + \frac{q_a\Phi}{m_ac^2}\right)\int u_a^k\overset{a}{\nabla}_k\, u_a^i\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a - \right.$$

$$\left. - e_aF^i_{\;.k}\int u_a^k\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a - q_a\nabla_k\Phi\left[g^{ik}\int\mathcal{D}(x\,|\,x_a)ds_a - -\int u_a^iu_a^k\mathcal{D}(x\,|\,x_a)\right]\right\}.$$

Выберем собственное время частицы b в качестве координаты x^4 и проинтегрируем последнее выражение по трехмерной пространственноподобной гиперповерхности V_b ($dV_b = \sqrt{-g}\,d^3\tilde{x}_b$). Вследствие определения инвариантной δ- функции (4.1) получим уравнения движения:

$$\frac{\mathcal{D}p_a^i}{ds_a} = \frac{1}{1 + \frac{q_a\Phi}{m_ac^2}}\left\{\frac{e_a}{c}F^i_{.k}u_a^k + \frac{q_a}{c}\nabla_k\Phi(g^{ik} - u_a^iu_a^k)\right\}, \tag{7.3}$$

где $p_a^i = m_acu_a^i$ - импульс частицы. Важно отметить, что поля Φ и A_i вычисляются в точке нахождения частицы, т.е. $A_i = A_i(x_a)$, $\Phi = \Phi(x_a)$; в этой же точке вычисляется и оператор $\overset{a}{\nabla}_i$, сдвиг полевых координат в точку x_a происходит вследствие интегрирования δ- функции по пространственноподобной гиперповерхности.

[5]Уравнение для скалярного поля не содержит слагаемого - $\Phi R/6$ и поэтому при $\mu_s = 0$ не является конформно-инвариантным. Однако и для конформно-инвариантного поля получающиеся уравнения движения не отличаются от (6.1), так как член $\Phi R/6$ компенсируется добавочными членами в T_p^{ik}.

8. Многовременной формализм и решение уравнений поля

8.1. Задача Коши

Обсудим теперь задачу с начальными условиями для системы (6.1) - (6.4). Введем, как мы это делали в предыдущем разделе, единичное времениподобное поле геодезических наблюдателей $k_i(x)$, по часам которых будем фиксировать события. Построим пространственноподобную гиперповерхность V, ортогональную k_i. На этой 3-мерной поверхности в момент времени τ_0 зададим компоненты потенциалов $\Phi(\tilde{x},\tau_0) \equiv \Phi_0(\tilde{x})$, $A_i(\tilde{x},\tau_0) \equiv A_i^0(\tilde{x})$; $g_{\alpha\beta}(\tilde{x},\tau_0) \equiv g^0_{\alpha\beta}(\tilde{x})$ и их производных по времени:

$$(\partial_\tau \Phi)_{\tau=\tau_0} \equiv \dot{\Phi}_0(\tilde{x}),\ (\partial_\tau A_i)_{\tau=\tau_0} \equiv \dot{A}_i^0(\tilde{x}),$$
$$(\partial_\tau g_{\alpha\beta})_{\tau=\tau_0} \equiv \dot{g}^0_{\alpha\beta}(\tilde{x}),$$

а также координаты и импульсы всех частиц: $x_a(\tau_0) \equiv x_a^0$, $u_a(\tau_0) \equiv u_a^0$. Решение задачи с начальными условиями для системы (6.1) - (6.4) имеет вид

$$\psi(x) = \psi(\tau,\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_1^0,\tilde{u}_1^0,\ldots,\tilde{x}_N^0,\Phi_0,\dot{\Phi}_0\ldots), \tag{8.1}$$

где $\psi(x)$ - некоторые полевые функции, зависящие от величин $\overset{0}{g}_{ik}, \tilde{x}_a^0, \Phi_0, \ldots$ как от параметров. Таким образом, полевые величины (g_{ik}, A_i, Φ) можно рассматривать как функционалы вида

$$\psi(x) = \psi(\tau,\tilde{x}\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{x}_N,\tau_0). \tag{8.2}$$

Эту запись необходимо понимать следующим образом: полевые величины вычисляются в точке $\tilde{x}$ в момент τ_0, если координаты и скорости частиц на гиперповерхности V в момент τ_0 были определены значениями $\tilde{x}_a, \tilde{u}_a$.

8.2. Многовременные уравнения поля

Характер уравнения поля (6.1) - (6.4) содержит в себе одну черту, которая создает трудности инвариантного построения статистической модели в ОТО. Эта трудность состоит в том, что движение каждой частицы описывается с помощью инвариантного собственного времени s_a, а в уравнениях поля (6.1) это время должно быть увязано с некоторым координатным τ в точке, в которой вычисляется поле. (Напомним, что в (8.2) величины $\tilde{x}_a, \tilde{u}_a$ взяты в один и тот же момент координатного времени в геодезической системе координат). Эту трудность, однако, можно обойти, вводя вместо полевых наблюдаемых величин многовременные полевые величины $\overset{\vee}{\psi}_N\,(x\,|\,x_1(s_1),\ldots,x_N(s_N),u_N(s_N))$, связанные с наблюдаемыми ψ с помощью правила

$$\psi(x\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{x}_N,\tilde{u}_N) =$$
$$= S_N^k(s_1,\ldots,s_N)\,\overset{\vee}{\psi}_N(x\,|\,x_1(s_1),\ldots,u_N(s_N)), \tag{8.3}$$

где S_N^k - оператор синхронизации, определяемый соотношением:

$$S_N^k(s_1,\ldots,s_N)\,\overset{\vee}{\psi}_N(x\,|\,x_1(s_1),\ldots,u_N(s_N)) = \tag{8.4}$$
$$= \int \prod_{a=1}^{N} \delta(s_a - s_k) ds_a ds_k\,\overset{\vee}{\psi}_N(x\,|\,x_1(s_1),\ldots,u_N(s_N)).$$

Таким образом,

$$\psi(x,\tau\,|\,x_1(\tilde{\tau}),\ldots,u_N(\tilde{\tau})) =$$
$$= \int ds_k\,\overset{\vee}{\psi}_N(x\,|\,x_1(s_k),\ldots,u_N(s_N)). \tag{8.5}$$

Интегрирование в (8.4) - (8.5) проводится по всей траектории частиц и наблюдателя. Связь между собственным временем наблюдателя s_k и координатным временем τ осуществляется с помощью соотношения[6]

$$ds_k = k_i dx^i. \tag{8.6}$$

[6]Вектор k лишь выбирает направление времени.

Из (8.4) следует, что оператор синхронизации коммутирует с любым оператором, действующим только на координаты x точки «измерения» поля:

$$[k_x, S_N^k] = 0. \tag{8.7}$$

Уравнения для многовременных полей запишем в виде

$$\overset{\vee}{R}_{ik} - \frac{1}{2}\overset{\vee}{R}\overset{\vee}{g}_{ik} = \kappa \overset{\vee}{T}_{ik}, \tag{8.8}$$

$$\overset{\vee}{F}{}^{ik}_{,k} - \mu_v^2 \overset{\vee}{A}{}^i = -4\pi \sum e_a u_a^i(s_a)\mathcal{D}[x\,|\,x_a(s_a)], \tag{8.9}$$

$$\overset{\vee}{\overset{*}{F}}{}^{ik}_{,k} = 0, \tag{8.10}$$

$$\Box \overset{\vee}{\Phi} + \mu_s^2 \overset{\vee}{\Phi} = -4\pi \sum q_a \mathcal{D}[x\,|\,x_a(s_a)], \tag{8.11}$$

где многовременной тензор энергии-импульса полей строится по правилам (6.6), (6.7), но относительно многовременных полей,

$$\overset{\vee}{T}{}^{ik}_{p} = \sum m_a c^2 \Big(1 + \frac{q_a \overset{\vee}{\Phi}}{m_a c^2}\Big) u_a^i(s_a) u_a^k(s_a)\ \mathcal{D}[x\,|\,x_a(s_a)]. \tag{8.12}$$

Вследствие (8.7) и (8.4) применение оператора S_N^k к обеим частям (8.8) - (8.11) приводит нас к исходным полевым уравнениям (6.1) - (6.4). Из определения многовременных полевых функций видно, что они должны иметь δ - образный характер.

8.3. Потенциалы Лиенара-Вихерта для безмассовых тензорных полей

Для того, чтобы смысл всего сказанного стал прозрачным, рассмотрим пример решения полевых уравнений для безмассового тензорного поля $\psi^{i_1\dots i_n}(x)$ в плоском пространстве-времени. Соответствующие многовременные уравнения поля имеют вид

$$\Box \overset{\vee}{\psi}{}^{i_1\dots i_n} = 4\pi \sum q_a u_a^{i_1} \dots u_a^{i_n} \mathcal{D}(x\,|\,x_a). \tag{8.13}$$

Для решения задачи с начальными условиями подействуем на обе части (8.13) оператором Фурье

$$\int\limits_0^{+\infty} dx^4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{i(k,x)}, \tag{8.14}$$

в результате получим решение

$$\overset{\vee}{\psi}{}_N^{i_1\dots i_n}(k\,|\,s_1,\dots,s_N) = -\frac{4\pi}{(k,k)} \sum_{+} q_a u_a^{i_1} \dots u_a^{i_n} e^{ik_j x_a^j(s_a)} \tag{8.15}$$

Индекс «+» у знака $\sum$ означает, что отбираются лишь $x_a^4 \geq 0$ (вследствие (8.14)). Совершая обратное Фурье-преобразование, после стандартных вычислений найдем

$$\overset{\vee}{\psi}{}_N^{i_1\dots i_n}(x\,|\,s_1,\dots,s_N) = 2\sum_{+} q_a u_a^{i_1} \dots u_a^{i_n} \delta[(R_a, R_a)], \tag{8.16}$$

где

$$R_a^i = x_a^i(s_a) - x^i. \tag{8.17}$$

Вычислим теперь наблюдаемое поле $\psi^{i_1\dots i_n}(x)$ с помощью соотношения (8.15):

$$\psi^{i_1\dots i_n}(x\,|\,\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N) = 2\sum_{+} q_a \int ds_k u_a^{i_1}(s_k) \dots u_a^{i_n}(s_k) \delta[(R_a, R_a)], \tag{8.18}$$

где теперь уже $x_a^i = x_a^i(s_k)$. Для взятия этого интеграла необходимо перейти от интегрирования по переменной s_k к интегрированию по переменной $z_a = (R_a, R_a)$. Дифференцируя, найдем связь

$$\frac{dz_a}{ds_a} = 2(u_a, R_a).$$

Таким образом, из (8.18) получим

$$\psi^{i_1\ldots i_n}(x\,|\,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N)=\sum_{+} q_a\frac{u_a^{i_1}\ldots u_a^{i_n}}{(u_a,R_a)}|\,z_a=0. \tag{8.19}$$

Уравнение $z_a = 0$ имеет два корня

$$t_a - t = \pm R(t_a)/c, \tag{8.20}$$

где $R(t_a) = |\vec{r}_a(t) - \vec{r}|$. Эти корни соответствуют запаздывающим и опережающим решениям. Поскольку мы решаем задачу с начальными условиями, всегда $t > 0$, поэтому из (8.20) отбирается «запаздывающий корень»

$$t_a + R(t_a)/c = t, \quad t_a \geq 0. \tag{8.21}$$

Соотношение (8.20) необходимо рассматривать как уравнение для определения $t_a(t,\vec{r})$, которое затем необходимо подставить в (8.19). При $n = 1$, $N = 1$ (8.19) описывает известные потенциалы Лиенара-Вихерта, при $n = 2$, усредняя распределение «арядов», получим решение линеаризированных уравнений Эйнштейна с источником.

Для того, чтобы продемонстрировать как можно пользоваться индексом k у оператора s_N^k, рассмотрим (8.18) в случае $n = 1$, $N = 1$. Тогда ориентируя вектор k вдоль 4 - скорости частицы $u_a^i = \delta_4^i$, $ds_k = dx_a^4(s_k)$, сразу получим из (8.18) закон Кулона: $\psi^i = q\delta_4^i/r$.

Мы уже отмечали, что многовременные полевые функции имеют δ-образный характер. В плоском пространстве для безмассовых полей эти функции равны нулю всюду, кроме изотропного конуса, соединяющего координаты каждой частицы и точки измерения поля. Если поле является массивным, то эти функции отличны от нуля на некоторых гиперболических поверхностях, лежащих внутри светового конуса, тангенс угла наклона этих конусов равен отношению $v(x,t)/c$, где v - скорость распространения поля. Это видно на примере решения многовременных уравнений для массивного поля в плоском пространстве-времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Г. Игнатьев. Математические модели теоретической физики. Лекция 10. // Казань: Казанский университет. – 2015. – http://kpfu.ru/main?p_id=28384.

2. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика // М: Наука. – 1982. – 608 с.

3. Ю.Л. Климонтович Ю.Л. Релятивистские кинетические уравнения для плазмы. I // Журн. эксп. и теорет. физ., Т. 37. – 1959. – с. 735-746.

4. Yu.G. Ignat'ev. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity // Russ. Phys. J., 26, 686-690 (1983).

5. Ю. Г. Игнатьев Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле // Сб. «Гравитация и теория относительности», Казань: Издательство КГУ, Выпуск 20. – 1983. – с. 50 – 109.

6. Yu.G. Ignat'ev, The statistical dynamics of classic particles ensemble in gravitational field, Grav. and Cosmol., **13**, 59-81 (2007).

7. E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris, 1934.

8. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

9. Ю.Г. Игнатьев. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. III. Расширение теории на отрицательные массы. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 1. – 2015. – с. 5–23.

Поступила в редакцию 12.03.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev
Relativistic Dynamics and Invariant Functions of Sources.

Keywords: Relativistic Kinetics, δ-function of Dirac, Invariance functions of Sourses.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

The theory relativistic invariant functions of the singular sources defined by world lines of particles is considered. The technics of calculations with these functions, allowing considerably to simplify and make obviously covariance some calculations in the theory field and a relativistic kinetics.

REFERENCES

1. Yu.G. Ignat'ev, 2015. http://kpfu.ru/main?p_id=28384.
2. Yu.L. Klimontovich, *Statistical Physics*, Moscow, Nauka, 1982.
3. Yu.L. Klimontovich, *JETP*, 37, p. 735 (1959).
4. Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 26, 686–690 (1983).
5. Yu.G. Ignat'ev, *Gravitation and Relativity Theory*, Kazan, Kazan University Press, No 20, 5–109 (1983).
6. Yu.G. Ignat'ev, *Grav. and Cosmol.*, **13**, 59–81 (2007).
7. E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Paris, 1934.
8. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). *Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields*. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.
9. Yu.G. Ignat'ev, *Spase, Time and Foudamental Interections*, No 1, 5–23 (2015).

Received 12.03.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru