

УДК 514.824;511.84;530;145

А. П. Ефремов¹ФОРМУЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СРЕДЕ:
ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Установлено, что изоморфизм группы Лоренца $SO(3, 1)$ и группы $SO(3, C)$, сохраняющей правило умножения кватернионов, позволяет развить теорию относительного движения систем отсчета в векторном формате с базовыми соотношениями, представляющими собой векторный бикватернион – «корень квадратный» из скалярного пространственно-временного интервала. Показано, что предложенная векторная версии теории приводит к тем же кинематическим эффектам, что и специальной теории относительности, притом заметно упрощая решение задач относительного движения неинерциальных реперов. Приведены решения нестандартных задач такого рода и рассмотрены элементы релятивистской динамики.

Ключевые слова: вектор-бикватернион, теория относительности, неинерциальные реперы, релятивистские эффекты.

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

1. Введение

Данная работа продолжает серию статей, посвященных поиску математических соотношений, описывающих физические закономерности, в среде гиперкомплексных чисел. В двух предыдущих работах изложен следующий материал. В работе [1] дано детальное описание ассоциативных по умножению алгебр и структур гиперкомплексных чисел. В работе [2] показано, что фундаментальные условия, обеспечивающие существование и стабильность этих алгебр, имеют своим следствием серию соотношений, которые при формулировке их в стандартных физических единицах представляют собой логически связанную серию уравнений квантовой, классической и релятивистской механики частицы.

В предлагаемой ниже работе речь пойдет лишь о подмножестве указанных гиперкомплексных чисел – кватернионов (и бикватернионов), правило умножения базисных единиц которых² $1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k1 = \mathbf{q}_k$, $\mathbf{q}_k\mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj}\mathbf{q}_j$ не изменяет своего формата при преобразованиях векторных единиц $\mathbf{q}_{k'} \equiv O_{k'n}\mathbf{q}_n$, $O_{k'n} \in SO(3, C)$ ³. Этот факт позволяет выделить в структуре алгебры математические соотношения, являющиеся точными аналогами базовых соотношений теории относительности. В разделе 2 показано, что использование кватернионного репера в качестве базиса системы отсчета наблюдателя позволяет определить векторный базисный объект теории относительности – кватернионный корень квадратный из элемента четырехмерной длины. Показано, что при этом все релятивистские эффекты сохраняются. В разделе 3 демонстрируется, что предложенная векторная версия теории позволяет существенно упростить решение кинематических задач релятивистского движения для наблюдателей, находящихся в неинерциальных системах отсчета. Расчет серии эффектов быстрого движения космических объектов, наблюдаемых с Земли, предложен в разделе 4. В разделе 5 обсуждаются особенности топологии модели вселенной, возникающие в векторной версии теории относительности; показано, что эти особенности, однако, не препятствуют развитию в рамках данной теории релятивистской динамики, в том числе, формулировки варианта релятивистской задачи двух тел. В заключительном разделе 6 кратко обсуждаются перспективы дальнейшего исследования.

¹E-mail: a.yefremov@rudn.ru

²Обозначения мнимых кватернионных единиц $\mathbf{q}_k = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ соотносятся с традиционными обозначениями Гамильтона так $\mathbf{q}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{q}_3 = \mathbf{k}$; в правиле умножения по повторяющимся индексам есть суммирование, δ_{kl} , ε_{jkl} , – 3D-символы Кронекера и Леви-Чивиты.

³Здесь рассматривается только векторное $O_{k'n} \in SO(3, C)$ преобразование единиц \mathbf{q}_k , которое 1:2 изоморфно преобразованию $SL(2, C)$, детально проанализированному в работе [1].

2. Кватернионные системы отсчета и релятивистская кинематика

Векторные единицы кватернионной алгебры геометрически представляют собой ортонормированный базис, или триаду \mathbf{q}_k , компоненты 2×2 -матричного представления которой могут содержать переменные параметры. Поскольку любые триады локально задают область $3D$ -пространства, ниже будет рассматриваться их зависимость только от точек физического пространства (координат) и времени. Если с началом триады связывать позицию физического наблюдателя, то такая триада может рассматриваться как система отсчета, вообще говоря, движущаяся. Есть физическое различие между триадами, явно зависящими лишь от действительных параметров и триадами, векторы которых суть функции комплексных параметров.

Действительно, триада, векторы которой преобразуются матрицами подгруппы $SO(3, R)$, с точки зрения геометрии, совершает поворот относительно исходного положения на некоторый действительный угол. Каждый пространственный вектор $\mathbf{a} \equiv a_k \mathbf{q}_k$ при любых таких поворотах остается неизменным $\mathbf{a} \equiv a_n \mathbf{q}_n = a_{k'} \mathbf{q}_{k'}$, хотя компоненты его, конечно, изменяются $a_{k'} = a_n O_{nk'}$. Типичный такой поворот – «простое вращение» – представляет собой поворот всей триады вокруг одного из ее векторов; например, поворот на угол α вокруг \mathbf{q}_3 , такое вращение удобно представить упрощенной понятной формулой $\mathbf{q}' \equiv R_3^\alpha \mathbf{q}$. Параметры подобных простых вращений (здесь α) называются углами Крылова [3]. Триада, осуществляющая пространственные повороты, станет вращающейся (неинерциальной) системой отсчета, если действительные параметры – углы поворота – зависят от времени наблюдателя (то есть триаду нужно дополнить часами).

Ситуация меняется, когда векторы триады преобразуются матрицами группы $SO(3, C)$, компоненты которых содержат комплексные параметры. Правило умножения единиц алгебры при этом не нарушается, но каждое такое преобразование превращает вектор кватернион в бикватернион. Физически значимым оказывается выделение подмножества векторных бикватернионов вида

$$\mathbf{s} \equiv (a_n + ib_n) \mathbf{q}_n \quad (1)$$

с «определяемой нормой»

$$s^2 = b^2 - a^2, \quad (2)$$

что возможно при условии ортогональности действительной и мнимой составляющих $a_n b_n = 0$. Это условие, всегда выполняется, когда вещественный и мнимый векторы направлены вдоль разных составляющих триады, например

$$\mathbf{s} \equiv ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 \quad (3)$$

Иными словами, вектор (1, 3) есть (шестимерный) бикватернионный «корень квадратный» из скаляра (2). Несложно доказать теорему [3, 4], которая гласит, что вектор (3) сохраняет свою форму

$$\mathbf{s} \equiv ib_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 = ib_{1'} \mathbf{q}_{1'} + a_{2'} \mathbf{q}_{2'}, \quad (4)$$

если векторы триады преобразуются $SO(3, C)$ -матрицами, представляющими собой сумму простых вращений, выполняемых в произвольном порядке, но с действительным параметром (углом поворота) относительно «мнимой оси» и мнимым параметром – относительно «вещественной оси». В целом такое преобразование реализуется произведением соответствующих матриц, образующих подгруппу $SO(1, 2) \subset SO(3, C)$. Понятно, что простое вращение с мнимым параметром является гиперболическим.

Соотношение форм-инвариантности (4) можно рассматривать как математический аналог следующего «физического» равенства

$$ds \equiv idt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2 = idt' \mathbf{q}_{1'} + dr' \mathbf{q}_{2'}, \quad (5)$$

где dr , dt – изменения координаты частицы и интервал времени наблюдения этого изменения в триаде $\Sigma \equiv \mathbf{q}_k$, dr' , dt' , – соответствующие параметры движения в другой триаде $\Sigma' \equiv \mathbf{q}_{k'}$, некоторым образом, движущейся относительно Σ ; фундаментальная скорость принята за единицу. Здесь нужно сделать два следующих существенных замечания. Во-первых, поскольку в данном случае (мнимое) время измеряется вдоль одного из векторов триады, дополнительный хронометр не нужен, так что каждая триада с наблюдателем представляет собой полноценную систему отсчета

(репер). И, во-вторых, равенство (5) будет выполняться, если системы отсчета связаны преобразованием, удовлетворяющим требованиям вышеизложенной теоремы:

$$\Sigma' = O\Sigma, \quad O \in SO(1, 2). \quad (6)$$

Преобразования (6) оставляют инвариантным также, конечно, и квадрат вектора (5) – квадрат пространственно-временного интервала $ds^2 = dt^2 - dr^2$, следовательно, кватернионная теория, своего рода «корень квадратный» из стандартной теории относительности, должна содержать все эффекты последней. И это действительно так, поскольку шестипараметрическая группа $SO(3, C)$ изоморфна специальной группе Лоренца $SO(1, 3)$, и легко показать, что матричные элементы этих групп однозначно выражаются друг через [3]. Релятивистские эффекты «содержатся» в уравнениях (5, 6) при задании соответствующих матриц поворота; полезно рассмотреть ряд примеров.

Простой буст. Пусть Σ' есть результат поворота Σ на гиперболический «угол» $i\psi$

$$\Sigma' = O_3^{i\eta}\Sigma, \quad O_3^{i\eta} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & i \sinh \eta & 0 \\ -i \sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7)$$

тогда из уравнения (5) сразу следует известное преобразование координат и времени

$$dr' = dt \sinh \eta + dr \cosh \eta, \quad dt' = dt \cosh \eta + dr \sinh \eta$$

Если при этом Σ' – наблюдаемый репер, то $dr' = 0$, и величина скорости ее движения относительно репера Σ определяется формулой $u = dr/dt = \tanh \eta$.

Сложение скоростей. Пусть реперы Σ' и Σ'' движутся относительно Σ так, что их скорости $u_1 = \tanh \eta_1$, $u_2 = \tanh \eta_2$, направлены под углом β друг к другу в пространственной плоскости $\{\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ репера Σ , и пусть при этом $\mathbf{u}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{q}_2$. Тогда штрихованные системы удовлетворяют уравнениям поворота типа (6) $\Sigma' = O_3^{i\eta_1}\Sigma$, $\Sigma'' = O_3^{i\eta_2}O_1^\beta\Sigma$, откуда сразу определяются выражения для базисных векторов системы Σ'' как функций векторов системы Σ' : $\Sigma'' = O_3^{i\eta_2}O_1^\beta O_3^{-i\eta_1}\Sigma'$, или в явной матричной форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1''} \\ \mathbf{q}_{2''} \\ \mathbf{q}_{3''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta_2 & i \sinh \eta_2 & 0 \\ -i \sinh \eta_2 & \cosh \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta_1 & -i \sinh \eta_1 & 0 \\ i \sinh \eta_1 & \cosh \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1'} \\ \mathbf{q}_{2'} \\ \mathbf{q}_{3'} \end{pmatrix}.$$

Первая строка этого матричного уравнения представляет собой зависимость первого вектора Σ'' от векторов Σ'

$$i\mathbf{q}_{1''} = (\cosh \eta_1 \cosh \eta_2 - \cos \beta \sinh \eta_1 \sinh \eta_2)i\mathbf{q}_{1'} + (\sinh \eta_1 \cosh \eta_2 - \cos \beta \cosh \eta_1 \sinh \eta_2)\mathbf{q}_{2'} - \sin \beta \sinh \eta_2 \mathbf{q}_{3'} \quad (8a)$$

Поскольку в данном случае Σ'' наблюдается из Σ' , соотношение (5) для этих систем отсчета записывается в виде $dt''i\mathbf{q}_{1''} = dt'(i\mathbf{q}_{1'} + u_y\mathbf{q}_{2'} + u_z\mathbf{q}_{3'})$, или полагая $dt'/dt'' = \cosh \eta$, в виде

$$i\mathbf{q}_{1''} = \cosh \eta(i\mathbf{q}_{1'} + u_y\mathbf{q}_{2'} + u_z\mathbf{q}_{3'}). \quad (8б)$$

Из соотношений (8) сразу определяется неизвестный гиперболический косинус

$$\cosh \eta = \cosh \eta_1 \cosh \eta_2 (1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)$$

и следуют формулы для компонент и (квадрата) модуля скорости Σ'' относительно Σ'

$$u_y = \frac{u_1 - u_2 \cos \beta}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}, \quad u_z = -\frac{u_2 \sin \beta \sqrt{1 - u_1^2}}{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}, \quad u^2 = \frac{(u_1 - u_2)^2 - (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^2}{(1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}. \quad (9)$$

Если реперы Σ'' и Σ' движутся в противоположных направлениях $\beta = \pi$, то уравнения (9) сводятся к случаю параллельного движения: $u = (u_1 + u_2)/(1 + u_1 u_2)$. Стоит отметить, что рассмотренная здесь задача о сложении скоростей при непараллельном движении релятивистских систем отсчета в специальной теории относительности оказывается более трудоемкой.

3. Кинематика неинерциальных систем отсчета в кватернионной версии

Параметры преобразований кватернионных триад могут быть функциями координат и времени физического пространства, тогда соответствующие системы отсчета являются неинерциальными. Описание такого движения в векторном формате оказывается весьма удобным, если использовать стандартные для подвижного репера дифференциальные соотношения $d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn} \mathbf{q}_n d\Phi_\xi$, $\frac{\partial}{\partial \Phi_\xi} \mathbf{q}_k(\Phi) \equiv \partial_\xi \mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn} \mathbf{q}_n$, где Φ_ξ – параметры, от которых как функция зависит кватернионная триада, $\omega_{\xi kn}$ – кватернионная связность, величина, антисимметричная по векторным индексам. Ниже – ряд известных примеров, демонстрирующих удобство метода, и расчет новых эффектов релятивистского неинерциального движения.

Гиперболическое движение. Прямолинейное (вдоль вектора \mathbf{q}_2) движение репера Σ' относительно репера Σ с постоянным ускорением $a' = const$ описывается уравнением поворота $\Sigma' = O_3^{i\eta(t')}\Sigma$, где матрица $O_3^{i\eta(t')}$ идентична (7), но имеет переменные компоненты, а параметр $\eta(t')$ нужно определить.

Пусть вначале Σ' наблюдается из Σ . Тогда базисный вектор-интервал имеет вид ($c = 1$)

$$ds = idt' \mathbf{q}_{1'} = idt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2, \quad (10)$$

а вектор ускорения, вычисляемый как вторая производная (10)

$$\mathbf{a}' = d^2 \mathbf{s} / dt'^2 = id \mathbf{q}_{1'} / dt' = i\omega_{t12} \mathbf{q}_2 = \dot{\eta} \mathbf{q}_2 = a' \mathbf{q}_2, \quad (11)$$

дает решение для параметра $\eta(t') = a't'$, постоянная интегрирования (начальная скорость) выбрана равной нулю. Теперь, используя следующее из равенства (10) соотношение $dt/dt' = \cosh \eta$, легко найти зависимость времени наблюдателя Σ от времени Σ'

$$t(t') - t_0 = \int dt' \cosh(a't') = \frac{1}{a'} \sinh(a't'); \quad t'(t) = \frac{1}{a'} \ln \left[a't + \sqrt{1 + (a't)^2} \right], \quad t_0 = 0,$$

и все «наблюдаемые» кинематические характеристики: относительную скорость

$$u(t) = \tanh(a't') = \tanh[\sinh(a't)] = \frac{a't}{\sqrt{1 + (a't)^2}}, \quad (12a)$$

ускорение и координату как функции времени наблюдателя

$$a(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{a'}{[1 + (a't)^2]^{3/2}}, \quad r(t) = \int u(t) dt = \frac{1}{a'} \sqrt{1 + (a't)^2} - \frac{1}{a'}. \quad (12b)$$

Но если формулы (12) можно получить в рамках специальной теории относительности [5], то обратная задача о движении инерциального репера, наблюдаемого из равноускоренной системы отсчета, в скалярном (стандартном) формате теории обычно не рассматривается. Но она легко решается в рассматриваемом векторном формате.

Пусть теперь Σ наблюдается из Σ' . Этой кинематической ситуации соответствует обращенное уравнение поворота $\Sigma = O_3^{-i\eta(t')}\Sigma'$ с прежней функцией параметра $\eta(t') = a't'$; вектор-интервал имеет вид

$$ds = idt' \mathbf{q}_{1'} - dr' \mathbf{q}_{2'} = idt \mathbf{q}_1,$$

откуда определяется (ожидаемо исчезающий) вектор ускорения инерциального репера

$$\mathbf{a} = d^2 \mathbf{s} / dt^2 = id \mathbf{q}_1 / dt = 0$$

и соотношение интервалов времени $dt'/dt = \cosh \eta$. Далее по изложенному выше алгоритму вычисляются все кинематические характеристики движения Σ , «наблюдаемого» из Σ'

$$t(t') = \int dt' / \cosh(a't') = \frac{1}{a'} \arcsin[\tanh(a't')], \quad t_0 = 0; \quad (13a)$$

$$u(t') = \tanh(a't'); \quad r'(t') = \frac{1}{a'} \ln[\cosh(a't')], \quad r_0 = 0; \quad a(t') = \frac{a'}{\cosh^2(a't')}. \quad (13b)$$

Как и в предыдущем случае, при малых значениях времени формулы (13) сводятся к формулам нерелятивистского ускоренного движения, но для больших значений времени Σ' часы в репере Σ замедляются и останавливаются в пределе $t_{t' \rightarrow \infty} \rightarrow \pi c / (2a')$.

Прецессия Томаса. Пусть репер Σ постоянно ориентирован относительно «неподвижных звезд» и находится в центре круговой орбиты радиуса R , по которой равномерно движется репер Σ' , ориентированный так же. Требуется найти проекцию $\mathbf{q}_{2'}$ на векторы \mathbf{q}_k притом, что в начальный момент времени $\mathbf{q}_{2'} \uparrow \mathbf{q}_2$. В нерелятивистском случае всегда $\mathbf{q}_{2'} = \mathbf{q}_2$, но при больших относительных скоростях должен возникать эффект, называемый прецессией Томаса [6]. В рамках специальной теории относительности расчет этого эффекта достаточно сложен (см., например, [7, 8]), в векторной версии задача решается просто. Репер Σ переводит в Σ' следующее тройное преобразование: (i) вращение вокруг вектора No 1 на угол $\gamma = \omega t$; (ii) гиперболический поворот вокруг вектора No 2 на «угол» $i\eta$, $\tanh \eta = \omega R = \text{const}$; (iii) обратное вращение вокруг нового вектора No 1 на угол $-\gamma(t') = -\omega' t'$, что задает прежнюю ориентацию репера Σ' относительно «неподвижных звезд». Уравнение такого поворота $\Sigma' = O_1^{-\gamma(t')} O_2^{i\eta} O_1^\gamma \Sigma$ имеет явный вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1'} \\ \mathbf{q}_{2'} \\ \mathbf{q}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega' t') & -\sin(\omega' t') \\ 0 & \sin(\omega' t') & \cos(\omega' t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & -i \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sinh \eta & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ 0 & -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix},$$

откуда с учетом соотношения $t' = t / \cosh \psi$ определяется, например, проекция $\mathbf{q}_{2'}$ на \mathbf{q}_3

$$\langle \mathbf{q}_{2'} \rangle_3 = \sin[(\omega - \omega')t] - 2 \sinh^2(\eta/2) \cos(\omega t) \sin(\omega' t) \cong \sin(\omega_T t).$$

Значит, с точки зрения Σ -наблюдателя, вектор $\mathbf{q}_{2'}$ прецессирует (ретроградно) с постоянной частотой, наибольшая часть которой (по порядку величины) соответствует прецессии Томаса

$$\omega_T \equiv \omega - \omega' = \omega(1 - \cosh \eta) = -\frac{\omega}{2} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

Полезно заметить, что в векторном формате теории относительности несложно рассчитываются эффекты типа прецессии Томаса для орбит произвольной формы, а также аналогичные эффекты, наблюдаемые из неинерциальных систем отсчета (детали см. в книге [4]).

Релятивистский гармонический осциллятор. Пусть репер Σ' движется под действием гармонической силы, направленной вдоль $\mathbf{q}_{2'}$, и наблюдается из инерциального репера Σ . Эта кинематическая ситуация аналогична рассмотренной выше задаче гиперболического движения, описывается сходным уравнением поворота и базовым интервалом. Но величина собственного ускорения репера Σ' (то есть, силы на единицу массы) в данном случае должна быть гармонической функций

$$\mathbf{a}' = d^2 \mathbf{s} / dt'^2 = \frac{d\eta}{dt'} \mathbf{q}_{2'} = \Omega' \beta \cos \Omega' t' \mathbf{q}_{2'};$$

здесь Ω' – собственная частота осциллятора, $\beta < 1$ – некоторая постоянная, $c = 1$. Последнее равенство определяет функцию гиперболического параметра $\eta(t') = \beta \sin \Omega' t'$, а с ним – соотношение времен

$$t = \int \cosh \eta(t') dt' = \int \cosh(\beta \sin \Omega' t') dt'.$$

При условии $\beta < 1$ этот интеграл вычисляется точно в виде ряда (см., например, [9])

$$t = t' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} t'^n + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)\Omega' t'}{(2n-2k)\Omega'} \right], \quad (14a)$$

откуда при $\Omega' T' = 2\pi$ определяются соотношения периодов и частот в Σ и Σ'

$$T = T' \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right), \quad \Omega = \Omega' \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right)^{-1}. \quad (14b)$$

Из соотношений (14б) следует, что в репере Σ колебательный процесс представляется более медленным, чем в реальности. Расчет кинематических характеристик осциллятора, наблюдаемого

из Σ , требует обращения формулы (14a): $t' = t'(t)$, что может быть сделано в приближении $\beta = v/c \ll 1$; $v = const$:

$$t' \cong t - \frac{\beta^2}{4} \left(t - \frac{1}{2\Omega} \sin 2\Omega t \right).$$

Относительная скорость реперов определяется стандартной формулой

$$u(t) = c \tanh(\beta \sin \Omega' t') \cong v \sin \Omega t \left(1 - \frac{1}{3} \beta^2 + \frac{7}{12} \beta^2 \cos^2 \Omega t \right), \quad (15)$$

согласно которой в начале и в конце периода реперы друг относительно друга неподвижны $u(0, T) = 0$, а максимальная наблюдаемая скорость есть $u_{\max} \equiv V(T/4) = v(1 - \beta^2/3)$. Таким образом, движение осциллятора Σ' , с точки зрения Σ , оказывается негармоническим. Наблюдаемые величины ускорения и координаты соответственно получаются дифференцированием и интегрированием функции (15) по времени наблюдателя.

Обратная задача наблюдения инерциального репера Σ из системы отсчета Σ' , связанной с осциллятором, решается по тому же алгоритму. В этом случае нет необходимости обращать функцию времени, поэтому все кинематические характеристики определяются в виде сходящихся рядов точно, что выделяет эту задачу из многих других релятивистских задач допускающих лишь приближенные решения.

Не лишне также отметить, что данная задача о релятивистском осцилляторе позволяет проанализировать известный «парадокс близнецов» с весьма «физических» позиций. Действительно, если космическое путешествие рассматривать как одно колебание осциллятора Σ' , то «близнецы» покоятся друг относительно друга в начале и в конце движения, где положения их строго совпадают, а также в точке поворота, тогда как околосветовая скорость ракеты на всех частях траектории достигается постепенно (детали см. в книге [4]). Ни одно из вышеперечисленных условий не выполняется при анализе этого парадокса в рамках специальной теории относительности.

4. Наблюдаемые с Земли релятивистские эффекты в ближнем космосе

Векторный формат теории относительности весьма удобен для моделирования широкого спектра кинематических ситуаций в неинерциальных реперах, в том числе и таких, где телом отсчета является Земля. Это позволяет рассмотреть ряд релятивистских эффектов в масштабах Солнечной системы, где скорости тел уже значительны, а скорость света не представляется слишком большой величиной, так что такие эффекты становятся заметными.

Релятивистский сдвиг спутников планет. Пусть Земля (репер Σ) и планета (репер Σ') движутся вокруг Солнца по круговым орбитам с постоянными линейными скоростями V_E, V_P , и пусть при этом разность их угловых орбитальных скоростей есть $\Omega \equiv \Omega_E - \Omega_P = const$; все величины измерены земным Σ -наблюдателем. Тогда гиперболический параметр $\eta(t) \ll 1$, определяющий стандартное соотношение времен $t = t' \cosh \eta$, с достаточной точностью определяется из геометрии треугольника скоростей

$$V^2 = V_E^2 + V_P^2 - 2V_E V_P \cos \Omega t = c^2 \tanh^2 \eta.$$

Пусть наблюдаемая планета имеет спутник, $\omega' = const$ – его собственная угловая частота обращения по орбите радиуса $r = const$. В силу соотношения времен частота, наблюдаемая с Земли, оказывается меньше $\omega = \omega' / \cosh \eta$, то есть часы «релятивистски отстают». Несложно найти наблюдаемый угол положения спутника относительно его позиции в некоторый начальный момент времени

$$\varphi_{obs}(t) = \int \omega dt = \omega' \int dt / \cosh \eta(t) \cong \omega' t \left\{ \left[1 - \frac{1}{2c^2} (V_E^2 + V_P^2) \right] + \frac{V_E V_P \sin(\Omega t)}{c^2 \Omega t} \right\},$$

а затем – выражение для наблюдаемого с Земли (кажущегося) орбитального сдвига спутника

$$\Delta l \equiv r(\varphi_{obs} - \varphi_{real}) \cong -\frac{V_E^2 + V_P^2}{2c^2} r \omega' t + \frac{V_E V_P \sin(\Omega t)}{c^2 \Omega} r \omega'. \quad (16)$$

Видно, что этот эффект накапливается со временем и, кроме того, движение спутника наблюдается как неравномерное с переменным ускорением

$$a_{obs} = -\frac{V_E V_P}{c^2} r \omega' \Omega \sin(\Omega t); \quad (17)$$

эти факторы могут оказаться физически значимыми. В частности, расчет показывает, что самые быстрые спутники Юпитера – Метида и Адрастея – за 10 лет наблюдений «релятивистски отстают» от своего реального положения на расстояния, существенно превышающие их размеры [9].

Однако, как показали астрономические наблюдения и теоретические исследования конца XX века, эффект орбитального сдвига может иметь серьезное практическое значение. Действительно, в многолетних наблюдениях Фобоса, быстрого спутника планеты Марс, замечена существенная неравномерность его движения по орбите притом, что построить удовлетворительную теоретическую модель этого движения на базе классической механики сложно (см., например, [10-13]). Кроме того, известно, что космические аппараты, направляемые к Марсу и тем более к Фобосу, либо оказываются неуспешными (в связи с необъяснимой потерей аппарата), либо обнаруживают Фобос на траектории с существенным опережением его ожидаемой (расчетной) позиции. Ссылки на соответствующие источники приведены в работе [14], где также показано, что расчет положения и ускорения Фобоса с помощью формул (16, 17) дает значения величин в пределах астрономических измерений и установленных экспериментально в ходе космических миссий. Так, цитируемые в литературе экспериментально измеренные значения ускорения Фобоса $a_{exp} = +1.88 \times 10^{-3}$ град/год² (см. [10]), $a_{exp} = -0.83 \times 10^{-3}$ град/год² (см. [11]) не превышают предельных значений ускорения $a_{limit} = \pm 4.84 \times 10^{-3}$ град/год², рассчитанных по формуле (17). А отмеченное станциями «Маринер-9» (1971 г.) и «Марс Экспресс» (2004 г.) «опережение» спутником на несколько километров его ожидаемого положения соответствует значению $\Delta l = 5.18$ км, рассчитанному по формуле (16) при условии, что в бортовой компьютер космических аппаратов закладывались данные орбитальных параметров Фобоса, полученные в период противостояния планет 8-летней давности. Таким образом, наблюдаемые неравномерности движения и запаздывание Фобоса вполне могут рассматриваться как следствия обсуждаемого релятивистского эффекта.

Данная теория был также применена для оценки успешности российского проекта «Фобос Грунт», реализация которого планировалась в 2011 году. В результате было сформулировано «релятивистское предупреждение» [14], предсказывающее возможный «пролет» космического аппарата мимо Фобоса в случае пренебрежения эффектом релятивистского сдвига. Проверить справедливость этого предсказания, к сожалению, не удалось, так как аппарат потерпел крушение на начальном участке своей траектории.

Релятивистское объяснение «аномалии Пионера». Космический зонд Пионер 10 (США) был направлен к границам Солнечной системы в 1972 году и более 20 лет передавал сигналы на Землю. Анализируя эти данные на базе эффекта Доплера, специалисты НАСА обнаружили аномальное замедление зонда [15] с почти постоянным (отрицательным) ускорением $a_P = -(8 \pm 3) \cdot 10^{-8}$ см/год². Аналогичный эффект был отмечен для зонда Пионер 11. Это сообщение вызвало серию попыток объяснить «аномалию Пионера», в основном, влиянием новых физических факторов (см. статью [16] и ссылки в ней). Однако построение простейшей кинематической схемы «наблюдатель-зонд» в рамках векторного формата теории относительности показало, что эта «аномалия» может быть релятивистским эффектом, ранее не учитывающимся в силу его предполагаемой малости.

Пусть «неподвижный» репер Σ связан с Солнцем (массой M), а репер Σ' – с зондом (массой m), движущимся прямолинейно вдоль направления \mathbf{q}_2 с переменной скоростью $u(t)$. Уравнение поворота $\Sigma' = O_3^{-i\eta} \Sigma$ в «плоском мире» имеет следствием стандартное соотношение времен $dt = dt' \cosh \eta$ и выражение наблюдаемой в Σ частоты сигнала $f(t)$ как функции генерируемой зондом частоты $f' = const$

$$f(t) = f' / \cosh \eta = f' \sqrt{1 - (u/c)^2} \cong f' \left(1 - \frac{u^2}{2c^2} \right).$$

Отсюда вычисляется относительная разность истинной и наблюдаемой частот, возникающая как следствие эффекта «замедления времени»

$$\Delta f / f' = \frac{f' - f}{f'} = \frac{u^2}{2c^2} = \varepsilon / c, \quad (18)$$

где ε – кинетическая энергия зонда на единицу его массы. Если величина (18) определяется в результате эксперимента, то наблюдатель может придти к ложному выводу о том, что изменение

частоты есть результат движения зонда относительно наблюдателя с некоторой дополнительной (кажущейся) скоростью u_K , в результате чего возникает эффект Доплера

$$f = \frac{f'}{\sqrt{1 - (u_K/c)^2}} \left(1 - \frac{u_K}{c} \cos \gamma\right), \quad (19)$$

где γ – угол между вектором скорости u_K и волновым вектором сигнала. В случае зонда Пионер 10 этот угол мал $\gamma \sim 0$; из формулы (19) тогда следует $u_K \cong c\Delta f/f$ и, с учетом соотношения (18), определяется величина кажущейся скорости

$$u_K \cong \varepsilon/c. \quad (20)$$

В рамках классической механики и гравитации Ньютона полная энергия зонда постоянна $E_0 \equiv m\varepsilon - GMm/r = \text{const}$, где G – гравитационная постоянная, r – расстояние Σ – Σ' , то есть $\varepsilon = E_0/m + GM/r$. Подстановка этого выражения в уравнение (20) и дифференцирование последнего по времени дает формулу расчета кажущегося ускорения (замедления) зонда

$$a_K \equiv \dot{u}_K = -uGM/(cr^2). \quad (21)$$

Если же рассматривать этот эффект не в «плоском мире», а в рамках общей теории относительности, где поле тяготения Солнца описывается решением Шварцшильда, то в соотношение времен появляется дополнительное «гравитационное» слагаемое [16]

$$dt = dt' \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r}\right),$$

так что величина кажущегося замедления по сравнению с формулой (21) удваивается

$$a_K = -2uGM/(r^2). \quad (22)$$

Подстановка в (22) констант $c = 2,99 \cdot 10^{10}$ см \cdot с $^{-1}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см $^3 \cdot$ г \cdot с $^{-2}$, $M = 1,99 \cdot 10^{33}$ г и параметров зонда Пионер 10 на среднем этапе его наблюдений (1983–1990 годы) $u = (1,52 - 1,41) \cdot 10^6$ см/с, $r = (4,3 - 7,2) \cdot 10^{14}$ см (из данных НАСА [17]) дает диапазон значений кажущегося ускорения

$$a_K = -(7,27 - 2,61) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2},$$

что сравнимо с приведенными выше экспериментальными данными. Здесь стоит сделать ряд замечаний. Из формул (21, 22) следует, что если «аномалия Пионера» является релятивистским кинематическим эффектом, то, будучи обратной функцией квадрата расстояния, наблюдаемое ускорение не может быть постоянным (как вначале полагали авторы наблюдения), но должно уменьшаться со временем. Последующий анализ экспериментальных данных показал [18], что абсолютная величина ускорения действительно уменьшается, для Пионера 10 это уменьшение составляет $\Delta a_P \approx 2 \cdot 10^{-9}$ см \cdot с $^{-2} \cdot$ год $^{-1}$. С помощью формулы (22) несложно рассчитать среднегодовое изменение модуля кажущегося ускорения зонда в конце среднего этапа наблюдений (1991 год), приняв, согласно [17], $r_{+\text{год}} = 7,2 \cdot 10^{14}$ см, $r = 7,58 \cdot 10^{14}$ см,

$$\Delta a_K = \frac{2uGM}{c} \left(\frac{1}{r_{+\text{год}}^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 2,51 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{год}^{-1},$$

что соответствует экспериментальным данным.

На основании изложенной здесь теории и приведенных расчетов приходится сделать вывод о том, что релятивистский (и гравитационный) эффект изменения частоты сигнала, принятый за часть эффекта Доплера должен являться заметной составляющей «аномалии Пионера» и учитываться при объяснении этого феномена.

5. Динамика тел в кватернионной версии теории относительности

Таким образом, векторный формат теории относительности оказывается весьма удобным для вычисления реальных физических эффектов на уровне кинематических соотношений. Не менее удобен он и для описания динамики релятивистских механических систем. Однако, прежде чем перейти к динамическим уравнениям, стоит отметить, что эта теория предполагает топологически своеобразную модель вселенной, насчитывающую не четыре измерения, как в стандартной теории относительности, а шесть измерений. Локально такую вселенную можно представить как две трехмерные области, в одной из которых сосредоточен действительный $3D$ -мир наблюдателя, а вторая представляет собой «мнимый» $3D$ -мир, где наблюдатель мысленно выделяет направление изменения времени [4]. При этом расстояния мнимого мира, как и действительного, измеряются в единицах длины, а интервал времени определяется наблюдателем как отношение мнимого расстояния к величине фундаментальной скорости. Такая вселенная «симметрична по сопряжению», то есть в каждом из $3D$ -миров, взаимно мнимых по отношению друг к другу, может находиться наблюдатель, считающий свой мир действительным. Но при этом следует полагать возможным и наличие наблюдателя в «параллельном мире». На сегодняшнем уровне понимания строения физического мира такая модель является абстракцией, поскольку пока она отражает лишь суть математических структур, «правильно» описывающих известные явления. Не исключен, впрочем, и иной взгляд на реальность данной модели. Приведенные здесь пояснения нужны для введения понятий о мнимых компонентах векторных (тензорных) величин, возникающих в 6-мерной модели.

Базовой величиной динамики в кватернионной теории относительности является вектор импульса. Пусть две взаимодействующие частицы с массами покоя M_0 и m_0 являются соответственно телами отсчета реперов Σ и Σ' , вообще говоря, не инерциальных. Если тело отсчета Σ' наблюдается из репера Σ , то выполняется равенство типа (5)

$$ds = icdt' \mathbf{q}_{1'} = icdt \mathbf{q}_1 + dr \mathbf{q}_2, \quad (23)$$

вектор \mathbf{q}_2 всегда параллелен вектору относительной скорости. Эта ситуация описывается уже известным уравнением поворота $\Sigma' = O_3^{\eta} \Sigma$. Несложно показать, что, помимо базисного вектора-интервала (23), замечательным свойством форм-инвариантности обладает также и вектор импульса. Действительно, из определения импульса наблюдаемого тела в его собственной системе отсчета Σ' с учетом соотношения времен $dt = dt' \cosh \eta$, следует

$$\mathbf{P}' = m_0 \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dt'} = m_0 \cosh \eta \frac{ds}{dt} = m \frac{ds}{dt} \equiv \mathbf{P}, \quad (24)$$

где, как в специальной теории относительности, принято $m = m_0 \cosh \eta$. Разложение вектора импульса по компонентам реперов определяется из соотношений (23, 24)

$$\mathbf{P}' = im_0 c \mathbf{q}_{1'}, \quad (25a)$$

$$\mathbf{P} = m_0 \cosh \eta (ic \mathbf{q}_1 + u \mathbf{q}_2). \quad (25b)$$

Уравнение динамики как закон изменения импульса под действием силы можно записать в формате уравнений Ньютона с позиций разных системы отсчета.

В репере Σ' от времени t' зависит направляющий вектор времени $\mathbf{q}_{1'}(t')$. Производная по t' собственного импульса (25a) выражается через компоненты связности, вводимые по правилу $\partial_{t'} \mathbf{q}_{k'} = \Omega_{k'n'} \mathbf{q}_{n'}$, или в развернутом виде

$$\partial_{t'} \mathbf{P}' = m_0 ic (\Omega_{1'2'} \mathbf{q}_{2'} + \Omega_{1'3'} \mathbf{q}_{3'}),$$

где компоненты связности описывают соответственно собственное касательное и нормальное ускорение репера Σ'

$$\Omega_{1'2'} = -ia_{2'}/c, \quad \Omega_{1'3'} = -ia_{3'}/c.$$

Если определить силу как произведение массы покоя Σ' -наблюдателя и ускорения, которое он ощущает (измеряет), $\mathbf{F}' = m_0 a_{k'} \mathbf{q}_{k'}$, то динамика в репере Σ' описывается соотношением, имеющим формат уравнений Ньютона

$$\partial_{t'} \mathbf{P}' = \mathbf{F}'. \quad (26)$$

Соотношение (26) удобно использовать при решении обратной задачи механики для наблюдаемого тела: Σ' -наблюдатель, инструментально измерив собственное ускорение и зная собственную массу покоя, может вычислить компоненты действующей на него силы.

Для Σ -наблюдателя также можно записать уравнение типа (26) $\partial_{t'}\mathbf{P}' = \mathbf{F}'$; после дифференцирования импульса (25б) по времени t оно принимает вид

$$\partial_t \mathbf{P} = m_0 [\dot{\eta} \sinh \eta (ic\mathbf{q}_1 + u\mathbf{q}_2) + \cosh \eta (ic\Omega_{12}\mathbf{q}_2 + ic\Omega_{13}\mathbf{q}_3 + \dot{u}\mathbf{q}_2 + u\Omega_{21}\mathbf{q}_1 + u\Omega_{23}\mathbf{q}_3)] = F_k \mathbf{q}_k, \quad (27)$$

где по правилу $\partial_t \mathbf{q}_k = \Omega_{kn} \mathbf{q}_n$ введены компоненты связности, отождествляемые с нормальной и касательной компонентами $\Omega_{12} = -ia_2/c$, $\Omega_{13} = -ia_3/c$ собственного ускорения репера Σ и с угловой скоростью $\Omega_{23} \equiv \Omega$ его поворота в плоскости векторов \mathbf{q}_2 и \mathbf{q}_3 . При этом векторное уравнение (27) записывается в компонентах следующим образом

$$im \frac{u}{c} (c\dot{\eta} + a_2) = iF_1, \quad (28a)$$

$$m(c\dot{\eta} + a_2) = F_2, \quad (28б)$$

$$m(u\Omega + a_3) = F_3. \quad (28в)$$

Уравнения (28) описывают динамику релятивистского тела (репера Σ'), движущегося под действием некоторой силы и наблюдаемого из, вообще говоря, неинерциального репера Σ , вектор \mathbf{q}_2 которого постоянно параллелен вектору относительной скорости реперов. Эта система уравнений имеет две существенные отличительные черты. Во-первых, здесь присутствует временная (мнимая) компонента силы F_1 , наличие которой связано с $3+3$ -симметрией вселенной в данной модели: подобно тому, как сила F_2 изменяет величину относительной скорости, следовательно, масштаба пространства, так сила F_1 симметрично изменяет масштаб времени. Впрочем, компонента (28a), пропорциональная компоненте (28б), не влияет на математическое содержание уравнений. Во-вторых, релятивистский характер динамики очевидно подтверждается тем, что в полученной системе уравнений вместо производных скорости по времени фигурируют производные гиперболического параметра. В целом эта система позволяет решать прямые и обратные задачи динамики и при малых значениях u/c сводится к классической системе уравнений Ньютона.

Взаимосвязь ускорений. Взаимозависимость между собственным ускорением репера Σ' и компонентами его ускорения, наблюдаемого из системы отсчета Σ , устанавливается с помощью уравнения поворота $\Sigma' = O_3^\eta \Sigma$, из которого следуют соотношения

$$\mathbf{q}_{1'} = \cosh \eta \mathbf{q}_1 - i \sinh \eta \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_{2'} = i \sinh \eta \mathbf{q}_1 + \cosh \eta \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_{3'} = \mathbf{q}_3, \quad \partial_{t'} = \cosh \eta \partial_t.$$

После подстановки этих соотношений с учетом свойства инвариантности (24) уравнение (26) приводится к виду

$$\partial_t \mathbf{P} = m \left(\frac{V}{c} a_{2'} i \mathbf{q}_1 + a_{2'} \mathbf{q}_2 + \frac{a_{3'}}{\cosh \eta} \mathbf{q}_3 \right); \quad (29)$$

сравнение коэффициентов при векторах \mathbf{q}_k в уравнениях (27) и (29) дает формулы искомой взаимосвязи касательного и нормального ускорений

$$a_{2'} = c\dot{\eta} + a_2, \quad \frac{a_{3'}}{\cosh \eta} = V\Omega + a_3. \quad (30a)$$

Эти соотношения полезно переписать в виде

$$c\dot{\eta} = a_{2'} - a_2, \quad V\Omega = \frac{a_{3'}}{\cosh \eta} - a_3, \quad (30б)$$

явно демонстрирующем особенности релятивистской динамики. Действительно, разность касательных ускорений реперов определяет наблюдаемое касательное ускорение, которое здесь выражается как производная по времени от гиперболического параметра (а не от относительной скорости). Наблюдаемое же нормальное ускорение (заданное здесь модулем векторного произведения относительной скорости реперов и угловой скорости вращения репера Σ) есть релятивистски скорректированная разность собственных нормальных ускорений вовлеченных систем отсчета.

Несложно проверить, что при условии $V/c \ll 1$ соотношения (30б) сводятся к классическому случаю.

Стоит добавить, что последние соотношения имеют простой геометрический смысл, по сути, являются следствием того факта, что кватернионная связность не является тензором относительно преобразований репера. Для частного случая связности Ω_{kn} эта формула имеет вид

$$\Omega_{k'n'} = O_{k'j} O_{n'm} \Omega_{jm} + \partial_t O_{k'j} O_{n'j},$$

тензорные свойства «портит» последнее слагаемое. В случае используемого здесь простого преобразования $\Sigma' = O_3^j \Sigma$ только две компоненты отличны от нуля

$$\Omega_{1'2'} = \Omega_{12} - i\dot{\psi}, \quad \Omega_{1'3'} = \cosh \psi \Omega_{13} - i \sinh \psi \Omega_{23};$$

подстановка сюда принятых выше обозначений компонент связности через собственные ускорения реперов приводит в точности к уравнениям (30а). Таким образом, уравнения релятивистской динамики представляют собой отражение геометрических свойств рассматриваемого кватернионного пространства.

Формулировка релятивистской задачи двух тел. Пусть M_0 и m_0 – соответственно массы покоя тел отсчета реперов Σ и Σ' , взаимодействующих между собой. Тогда, с позиций базового репера Σ , компоненты ускорений следующим образом выражаются через компоненты силы

$$a_{2'} = F_{2'}/m_0, \quad a_2 = F_2/M_0, \quad a_{3'} = F_{3'}/m_0, \quad a_3 = F_3/M_0. \quad (31)$$

Здесь $F_{k'}$, F_k – компоненты связующей силы, действующей соответственно на Σ' и Σ , при этом касательное ускорение определяется через релятивистскую массу $m = m_0 \cosh \eta$ наблюдаемого репера Σ' , так как в этом направлении есть относительное движение; нормальное ускорение определяется через массу покоя. Подстановка определений (31) в уравнения (30б) приводит к следующей простой системе динамических уравнений

$$c\dot{\eta} = F_{2'}/m - F_2/M_0, \quad V\Omega = F_{3'}/m - F_3/M_0. \quad (32a)$$

В силу симметричности механической ситуации, аналогичная система должна быть записана для базы Σ' , из которой наблюдается репер Σ

$$-c\dot{\eta} = F_{2'}/M - F_2/m_0, \quad -V\Omega = F_{3'}/M - F_3/m_0, \quad (32б)$$

но с учетом противоположного знака относительной скорости и необходимости проводить все вычисления во времени t' .

Уравнения (32) представляют собой систему уравнений релятивистской динамики двух взаимодействующих тел. Существенно заметить, что все компоненты сил оцениваются конкретным наблюдателем в определенный момент времени (t или t'). Эти уравнения весьма удобно использовать для приближенного решения широкого круга задач с учетом эффектов запаздывания взаимодействий и сигналов. Несложно показать, что эти эффекты, как минимум, пропорциональны V/c при условии, что скорость передачи взаимодействия (как и электромагнитного сигнала) конечна. Например, если на тело Σ со стороны тела Σ' действует переменная сила $F[r(t)]$, то с точки зрения Σ -наблюдателя, на тело Σ' , находящееся на расстоянии r , такая же по модулю сила со стороны Σ будет действовать с запазданием $F'[r(t)] = -F[r(t + \Delta t)]$, $\Delta t = r/c$. Если $\Delta t/t \ll 1$, то

$$\mathbf{F}'[r(t)] \cong \mathbf{F}[r(t)] + \frac{d\mathbf{F}}{dr} \frac{dr}{dt} \Delta t = \mathbf{F}[r(t)] + r \frac{d\mathbf{F}}{dr} \frac{V}{c},$$

где V – радиальная компонента относительной скорости. Подстановка данного разложения в систему (32а), очевидно, требует поиска решения до первого порядка по V/c , что достигается представлением радиальной скорости в виде классической и релятивистской составляющих $\dot{r} = V_C + V_R$, $V_R \ll V_C$.

Впрочем, даже в тех случаях, когда параметры запаздывания пренебрежимо малы (статическое поле сил, малы расстояния между телами, малы градиенты силы), в решения могут проявляться эффекты, отражающие релятивистскую специфику динамических уравнений.

Показательный пример – задача движения частицы в поле большой массы. Пусть тело с массой M_0 является телом системы отсчета наблюдателя Σ , неподвижной ($a_k = 0$), но допускающей повороты, и пусть это тело есть источник поля центральной силы, в котором движется частица

Σ' с массой покоя m_0 , $M_0 \gg m_0$; поле силы статическое, эффект запаздывания не учитывается (задача будет решаться в приближении малых относительных скоростей).

Поскольку вектор импульса частицы форм-инвариантен по отношению к преобразованиям поворота, уравнение динамики можно записать (и решать) в любом допустимом репере. В данном случае удобно использовать следящий репер, вектор \mathbf{q}_2 которого задает направление радиуса-вектора частицы $\mathbf{r} = r\mathbf{q}_2$; тогда очевидно $\mathbf{F} = F\mathbf{q}_2$. Вектор импульса частицы (25б) в следящем репере записывается так

$$\mathbf{P} = m_0 \cosh \eta (iV_1 \mathbf{q}_1 + V_2 \mathbf{q}_2 + V_3 \mathbf{q}_3) \equiv m(ic\mathbf{q}_1 + \dot{r}\mathbf{q}_2 + r\dot{\beta}\mathbf{q}_3),$$

здесь β – угол поворота репера Σ , $m = m_0 \cosh \eta$. Динамические уравнения $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{F}$ представлены системой

$$im\dot{\eta}V = iF_1, \quad (33a)$$

$$m \left(\frac{V}{c} \dot{\eta} \dot{r} + \ddot{r} - r\dot{\beta}^2 \right) = F, \quad (33б)$$

$$m \left(\frac{V}{c} \dot{\eta} r \dot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta} + r\ddot{\beta} \right) = 0, \quad (33в)$$

где $V = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2)^{1/2}$ – модуль скорости частицы. При условии $F_1 = (\dot{r}/c)F$ уравнение (33a) является следствием уравнений (32б, 32в), так что достаточно решить два последних уравнения системы. Стандартная подстановка $\sigma \equiv r^2\dot{\beta}$ в уравнение (32в) дает первый интеграл системы $\sigma = r^2\dot{\beta} = \sigma_0 / \cosh \eta(t)$, $\sigma_0 = const$, то есть секторная скорость σ в репере Σ переменна, но модуль момента импульса – величина постоянная $L \equiv m\sigma = m_0\sigma_0$. При этом из уравнения (32б) после умножения его на $\dot{r} \cosh \eta$ следует интеграл энергии $\frac{m_0}{2} \left(\dot{r}^2 \cosh^2 \eta + \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right) + U \cong E = const$, но в предположении, что $\frac{dU(r)}{dr} \cong \frac{d\tilde{U}(r)}{dr} \left(1 + \frac{PV^2}{2c^2} \right)$, где \tilde{U} – какой-то классический потенциал, P – натуральное число. Выражая из интеграла энергии $V^2/(2c^2) = (E - \tilde{U})/m_0 \ll 1$, легко найти решение последнего дифференциального уравнения

$$U \cong \tilde{U} \left[1 + \frac{PE}{m_0c^2} - \frac{P\tilde{U}}{2m_0c^2} \right] + U_0, \quad U_0 = const. \quad (34)$$

Теперь можно найти вторые интегралы движения. В частности, равенство дифференциалов времени, вычисленных из интегралов секторной скорости и энергии, имеет своим следствием уравнение траектории

$$\beta(r) - \beta_0 = \int \frac{\sigma_0 dr}{r^2} \left[\frac{2}{m_0} (E_0 - U) - \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_0 = const, \quad (35)$$

формально классическое, но с потенциалом (34).

Формула (35), примененная для расчета релятивистских поправок к задаче Кеплера с потенциалом $\tilde{U}(r) = -GM_0m_0/r$, приводит к траектории в форме искаженного, но статического эллипса, так что эффекта типа смещения перигелия данные поправки не вызывают. Более интересным оказывается пример, связанный с вышеупомянутой аномалией ускорения космического зонда Пионер 10. Радиальное ускорение зонда, записанное в формате $a_r = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d(\dot{r}^2/2)}{dt}$, просто рассчитывается как производная квадрата радиальной скорости, определяемой из интеграла энергии,

$$a_r \cong a_N \left[1 + \frac{(P-4)E}{2m_0c^2} - \frac{2U_0}{m_0c^2} + \frac{2(P-4)\alpha}{m_0c^2} \frac{1}{r} + \frac{3\sigma_0^2}{2c^2} \frac{1}{r^2} \right], \quad (36)$$

где $a_N = -GM_0m_0/r^2$ – ньютоновское ускорение. В случае аномалии Пионера целесообразно учитывать только те релятивистские добавки к ускорению, которые убывают не быстрее чем a_N , то есть в формуле (36) следует оценить только первые две постоянные поправки. По данным НАСА [17], на расстоянии $r_P = 6 \cdot 10^{14}$ см от Солнца зонд Пионер 10 имел скорость $V_P = 1,5 \cdot 10^6$ см/с; известны также масса Солнца $M_S = 1,99 \cdot 10^{33}$ г и величина гравитационной постоянной $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³г⁻¹с⁻². Это позволяет вычислить классическое ускорение

зонда $a_N = -GM_S/r_P^2 \cong -3,7 \cdot 10^{-4}$ см/с² и вклад механической энергии зонда в первую поправку $E/(m_0c^2) \sim 10^{-9}$. В целом первая поправка имеет порядок $\sim 10^{-13}$ см/с², что на 5 порядков меньше значения наблюдаемой аномалии.

Вторая поправка определяется постоянной U_0 , которую можно трактовать как локально постоянную (фооновую) гравитационную энергию части Галактики (включающей гало), расположенной в квазисферической области радиуса солнечной орбиты $R \sim 10^{22}$ см и имеющей массу $M_G \sim 10^{45}$ г [19]. Такого рода фооновая гравитация приводит к дополнительному (помимо ньютоновского) замедлению космического зонда

$$a_G \cong -a_N \frac{2U_0}{m_0c^2} = a_N \frac{GM_G}{Rm_0c^2} \cong -0,44 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2,$$

что сравнимо с наблюдаемой величиной «аномалии Пионера», которая (не исключено) может являться суммой влияния различных физических факторов.

6. Заключение

Завершая на этом статью о кватернионной модели теории относительности, следует сказать следующее. Здесь не только изложены физико-математические основы построения данной теории, но, как представляется, также продемонстрированы и определенные практические выгоды ее использования для решения широкого спектра кинематических и динамических задач механики. Однако эта практичная теория не может считаться завершённой с чисто математических позиций, поскольку в ней системы отсчета представлены триадами кватернионных векторов, базовыми единицами алгебры, но не элементарными математическими объектами. Такими объектами, как показано в работе [2], являются спиноры, составляющие диады на фундаментальной поверхности, и нет сомнения в том, что все основные соотношения векторной теории относительности также могут быть записаны в терминах кватернионных спиноров. Но эта задача пока еще ждет своего решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефремов А.П. Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как математическая среда обитания физических законов // *Пространство-Время и Фундаментальные Взаимодействия*, 2014 no. 1. С. 5–19.
2. Ефремов А.П. Формулы физических законов в гиперкомплексной среде: механика // *Пространство-время и фундаментальные взаимодействия*, 2014 no.3. С. 5–15.
3. Yefremov A.P. Bi-quaternion Square Roots, Rotational Relativity, and Dual Space-Time Intervals // *Gravit. and Cosmol.*, 2007 Vol. 13, no. 3 (51). p.p. 178–184.
4. Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля, М., изд. РУДН, 2005.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, М., изд. Наука, 1973.
6. Tomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis // *Philosophical Magazine*, 1927 Vol. 3, no.7. p.p. 1–13.
7. Taylor E.F., Wheeler J.A., *Space-Time Physics*, San Francisco, London, W.H.Freeman & Co., 1966.
8. Misner Ch.W., Thorn K.S., Wheeler J.A. *Gravitation*, San Francisco, W.N.Freeman & Co., 1973.
9. Yefremov A.P. Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects // *Adv.Sci.Lett.* 2008 Vol.1, pp. 179–186.
10. Sharpless B.P. Secular acceleration in the longitudes of the satellites of Mars // *Astron. J.* 1945, Vol. 51. pp. 185–186.
11. Wilkins G.A. Meeting of Royal Astronomical Society // *The Observatory*, 1970, Vol.90, no. 976, pp.37–38.
12. Wilkins G.A., Sinclair A.T. The dynamic of the planets and their satellites // *Proc. R. Soc. Lond.*, 1974, Vol. A 386. pp. 85–104.
13. Shor V.A. The motion of the Martian satellites // *Celestial Mechanics*, 1975, Vol. 12, pp. 61–75.
14. Yefremov A.P. Relativistic Warning to Space Missions Aimed to Reach Phobos // *Int. Journal of Astron. and Astrophys.*, 2011, Vol.1, no. 4. pp. 200–203.
15. Anderson J.D., Laing P.A., Lau E.L., Liu A.S., Nieto M. M., Turyshev S.G. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration // *Phys. Rev. Lett.*, 1998, Vol. 81. pp. 2858–2862.
16. Yefremov A.P. Gravitational Contributions to Pioneer Space Probe Decelerations and Time-Delay-Doppler Relativistic Confusion // *Gravit. and Cosmol.*, 2009, Vol. 15, no.2. pp. 121–128.
17. <http://cohoweb.gsfc.nasa.gov/helios/book2/book2.html>
18. Turyshev S.G., Toth V.T., Ellis J., Marcwardt C.B. Support for Temporary Varying Behavior of Pioneer Anomaly form the Extended Pioneer 10 an 11 Doppler Data Sets // arXiv: 1107.2886v1 [gr-qc] 14 jul 2011.

19. Horrobin M., Eisenhauer F., Tecza M., Thatte N., Genzel R., Abuter R., Iserlohe C., Schreiber J., Schegerer A., Lutz D., Ott T., and Schodel R. First results from SPIFFI. I: The Galactic Center // *Astron. Nachr.* V. 2004, AN 325. Pp. 88–91.

Поступила в редакцию 06.06.2015

Ефремов Александр Петрович, профессор, д.ф.-м.н., директор Института гравитации и космологии РУДН, зав. кафедрой физики РУДН. Российская Федерация, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru

A. P. Yefremov

Physical laws in the medium of hypercomplex numbers: theory of relativity

Keywords: vector-biquaternion, theory of relativity, non-inertial frames, relativistic effects.

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

It is determined that isomorphism of the Lorentz group $SO(3, 1)$ and the group $SO(3, C)$ preserving multiplication of quaternions allows developing a novel version of the relativity theory with the basic object in format of vector-biquaternion, a square root from scalar space-time interval. It is shown that this vector version of the relativity theory leads to the same cinematic effects as the special relativity while essentially simplifying solution of problems of relative motion of non-inertial observers. Some non-standard solution of this type are given, and elements of relativistic dynamic are considered in detail.

REFERENCES

1. Yefremov A.P. Pregeometric structure of associative algebras and quaternion spaces as mathematical medium of physical laws, *Space-time and Fundamental Interactions*, 2014 no. 1. pp.5–19.
2. Yefremov A.P. Physical laws in hypercomplex medium: mechanics, *Space-time and Fundamental Interactions*, 2014 no.3. pp. 5–15.
3. Yefremov A.P. Bi-quaternion Square Roots, Rotational Relativity, and Dual Space-Time Intervals, *Gravit. and Cosmol.*, 2007 Vol. 13, no. 3 (51). pp. 178–184.
4. Yefremov A.P. *Quaternion spaces, frames and physical fields*, Moscow, PFUR publ., 2005.
5. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theory of fields*, Moscow, Nauka publ., 1973.
6. Tomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis, *Philosophical Magazine*, 1927 Vol.3, no.7. pp. 1–13.
7. Taylor E.F., Wheeler J.A., *Space-Time Physics*, San Francisco, London, W.H.Freeman & Co., 1966.
8. Misner Ch.W., Thorn K.S., Wheeler J.A. *Gravitation*, San Francisco, W.N.Freeman & Co., 1973.
9. Yefremov A.P. Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects, *Adv.Sci.Lett.*, 2008 Vol.1, pp. 179–186.
10. Sharpless B.P. Secular acceleration in the longitudes of the satellites of Mars, *Astron. J.*, 1945, Vol. 51. pp. 185–186.
11. Wilkins G.A. Meeting of Royal Astronomical Society, *The Observatory*, 1970, Vol.90, no. 976, pp. 37–38.
12. Wilkins G.A., Sinclair A.T. The dynamic of the planets and their satellites, *Proc. R. Soc. Lond.*, 1974, Vol. A 386. pp. 85–104.
13. Shor V.A. The motion of the Martian satellites, *Celestial Mechanics*, 1975, Vol. 12, pp. 61–75.
14. Yefremov A.P. Relativistic Warning to Space Missions Aimed to Reach Phobos, *Int. Journal of Astron. and Astrophys.*, 2011, Vol.1, no. 4. pp. 200–203.
15. Anderson J.D., Laing P.A., Lau E.L., Liu A.S., Nieto M. M., Turyshev S.G. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, Vol. 81. pp. 2858–2862.
16. Yefremov A.P. Gravitational Contributions to Pioneer Space Probe Decelerations and Time-Delay-Doppler Relativistic Confusion, *Gravit. and Cosmol.*, 2009, Vol. 15, no.2. pp. 121–128.
17. <http://cohoweb.gsfc.nasa.gov/helios/book2/book2.html>.
18. Turyshev S.G., Toth V.T., Ellis J., Marcwardt C.B. Support for Temporary Varying Behavior of Pioneer Anomaly form the Extended Pioneer 10 an 11 Doppler Data Sets, arXiv: 1107.2886v1 [gr-qc] 14 jul 2011.
19. Horrobin M., Eisenhauer F., Tecza M., Thatte N., Genzel R., Abuter R., Iserlohe C., Schreiber J., Schegerer A., Lutz D., Ott T., and Schodel R. First results from SPIFFI. I: The Galactic Center, *Astron. Nachr.*, V. 2004, AN 325. Pp. 88–91.

Received 06.06.2015

Alexander P. Yefremov. Institute of Gravitation and Cosmology of Peoples Friendship University of Russia.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru