УДК 531.51

А. А. Попов[1]

СТАТИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В 4D-ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА-МАКСВЕЛЛА-АНТИ-ДИЛАТОНА [2]

В работе получены точные статические сферически симметричные асимптотически плоские решения четырёхмерной теории Эйнштейна с полями Максвелла и анти-дилатона. Получены новые решения, описывающие кротовые норы.

Ключевые слова: гравитация, анти-дилатон, статические сферически симметричные решения.

PACS: 04.20.Jb

Введение

Низкоэнергетический предел теории струн включает, помимо других полей, скалярное дилатонное или анти-дилатонное поле. Известно, что решения, которые соответствуют электрически заряженным черным дырам, изменяются при наличии дилатонного поля. Такие решения были изучены, например, в [1,5,5–8]. Введение в лагранжиан теории анти-дилатонного поля может приводить к появлению в рамках такой теории кротовых нор: топологических ручек, соединяющих удаленные области одной или различных вселенных. Такой случай рассматривался, например, в работах [7, 8]. В этой работе получены точные статические сферически симметричные асимптотически плоских решений четырёхмерной теории Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона, среди которых есть новые решения, описывающие кротовые норы.

В работе используются геометрические единицы c = G = 1.

1. Теория Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона

Действие теории имеет следующий вид

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R - \eta 2\phi_{,k}\phi^{,k} - e^{-2\phi}F_{kl}F^{kl}\right]. \tag{1.1}$$

Константа связи дилатонного и гравитационнго полей η может принимать либо значение $\eta = 1$ (дилатон), либо значение $\eta = -1$ (анти-дилатон). В дальнейшем будем рассматривать только случай анти-дилатонного поля. Уравнения гравитационого поля для метрики $g_{\mu\nu}$, максвелловского поля для векторного потенциала A_μ и анти-дилатонного поля для ϕ имеют вид

$$G^\nu_\mu = 8\pi T^\nu_\mu = \phi_{,k}\phi^{,k}\delta^\nu_\mu - 2\phi_{,\mu}\phi^{,\nu} + e^{-2\phi}\left(2F_{\mu k}F^{\nu k} - \frac{\delta^\nu_\mu}{2}F_{kl}F^{kl}\right), \tag{1.2}$$

$$\left(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\right)_{;\mu} = 0, \tag{1.3}$$

$$\phi^{;\mu}_{;\mu} - \frac{1}{2}e^{-2\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.4}$$

Включение в действие теории поля ϕ приводит к появлению сохраняющегося дилатонного заряда Q_d. В статическом пространстве-времени он может быть определен следующим образом

$$Q_d = \frac{1}{4\pi}\oint \nabla_\alpha\phi dS^\alpha, \tag{1.5}$$

где интегрирование производится по замкнутой пространственно-подобной поверхности, окружающей заряд.

---

[1]E-mail: apopov@ksu.ru

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13–02–00757).

Метрика статического сферически симметричного пространства времени может быть записана следующим образом

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + w^2 dr^2 + h^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{1.6}$$

где f, w и h являются функциями только радиальной координаты r. Статическое сферически симметричное максвелловское поле радиально в каждой точке

$$F_{rt} = \mathcal{F}(r). \tag{1.7}$$

Уравнения Максвелла (1.3) в этом случае могут быть проинтегрированы и дают обобщение закона Гаусса в искривленном пространстве-времени с анти-дилатонным полем

$$e^{-2\phi}\frac{h^2}{fw}\mathcal{F} = Q_e, \tag{1.8}$$

где Q_e - элетрический заряд.

Действие теории (1.1) инвариантно при преобразованиях

$$\phi(x) \to \phi(x) + C, \tag{1.9}$$

$$A_\mu(x) \to e^C A_\mu(x). \tag{1.10}$$

Эту свободу можно зафиксировать заданием значения поля ϕ на бесконечности. В случае неравенства нулю ϕ_∞ это приводит к экранировке электрического заряда

$$E(r\to\infty) \simeq \frac{Q_e e^{2\phi_\infty}}{r^2}. \tag{1.11}$$

В дальнейшем будет предполагаться $\phi_\infty = 0$.

Нетривиальные компоненты уравнений Эйнштейна (1.2) имеют следующий вид

$$\binom{t}{t} \Rightarrow \frac{2}{w^2}\left(\frac{h''}{h} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{2h^2}\right) - \frac{1}{h^2} = \frac{\phi'^2}{w^2} - Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{1.12}$$

$$\binom{r}{r} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{2f'h'}{fh} + \frac{h'^2}{h^2}\right) - \frac{1}{h^2} = -\frac{\phi'^2}{w^2} - Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{1.13}$$

$$\binom{\theta}{\theta} = \binom{\varphi}{\varphi} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh}\right) = \frac{\phi'^2}{w^2} + Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{w^2}\left(\phi'' + \frac{f'}{f} - \frac{w'}{w} + 2\frac{h'}{h}\right)\phi' = -Q_e^2\frac{e^{2a\phi}}{h^4}, \tag{1.15}$$

а штрих означает дифференцирование по радиальной координате r. Выберем следующие их линейные комбинации

$$\binom{r}{r} + \binom{\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{w^2}\left(\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} + \frac{3f'h'}{fh} - \frac{f'w'}{fw} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2}\right) = 0, \tag{1.16}$$

$$\binom{t}{t} - \binom{r}{r} \Rightarrow \frac{2}{w}\left(\frac{h''}{h} - \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh}\right) = 2\frac{\phi'^2}{w}, \tag{1.17}$$

$$\binom{t}{t} + \binom{r}{r} \Rightarrow \frac{2}{w}\left(\frac{h''}{h} + \frac{f'h'}{fh} - \frac{w'h'}{wh} + \frac{h'^2}{h^2} - \frac{w^2}{h^2}\right) = -2Q_e^2\frac{e^{2\phi}}{h^4}, \tag{1.18}$$

Уравнение (1.16) содержит только метрический тензор и может быть записано в виде

$$\left[\frac{(fh)'h}{w}\right]' = fw. \tag{1.19}$$

Метрика статического сферически симметричного пространства времени (1.6) не изменяется под действием следующего преобразования

$$r \to \tilde{r}, \quad w^2 \to w^2 \left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2. \tag{1.20}$$

Воспользуемся свободой выбора w^2, чтобы зафиксировать

$$fw = 1. \tag{1.21}$$

Тогда уравнение (1.19) может быть проинтегрировано

$$(fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \tag{1.22}$$

где r_1 и r_2 - произвольные постоянные. Случай, когда обе константы r_1 и r_2 действительны и положительны, соответствует черной дыре с двумя горизонтами, находящимися в точках $r = r_{1,2}$. Экстремальная черная дыра возникает при $r_1 = r_2$. Случай, когда r_1 и r_2 являются взаимно сопряженными комплексными числами, соответствует кротовым норам. В дальнейшем будем использовать следующую линейную комбинацию параметров

$$\Delta = r_1 - r_2. \tag{1.23}$$

В калибровке (1.21) уравнения Эйнштейна (1.16,1.17) и (1.18) принимают следующий вид

$$w = 1/f, \ (fh)^2 = (r - r_1)(r - r_2), \tag{1.24}$$

$$h'' - h\phi'^2 = 0, \tag{1.25}$$

$$(f^2 hh')' = 1 - Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \tag{1.26}$$

Уравнение на дилатонное поле (1.15) тоже упрощается и может быть записано в виде

$$(f^2 h^2 \phi')' = -Q_e^2 \frac{e^{2\phi}}{h^2}. \tag{1.27}$$

В качестве одного из решений уравнений Максвелла (1.3) выберем решение, соответствующее ненулевому электрическому заряду

$$F_{rt} = \frac{Q_e e^{2\phi}}{h^2}. \tag{1.28}$$

Вычитая из уравнения (1.3) уравнение (1.4), найдем

$$\left(f^2 h h'_r\right)'_r - \left(f^2 h^2 \phi'_r\right)'_r = 1, \tag{1.29}$$

что дает

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)}. \tag{1.30}$$

Подстановка этого выражения в (1.2) приводит к

$$\phi''_{rr} + 2\frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)}\phi'_r = -\frac{(C - r_1)(C - r_2)}{(r - r_1)^2 (r - r_2)^2}. \tag{1.31}$$

2. Заряженные антидилатонные черные дыры

Рассмотрим случай

$$r_1 - r_2 > 0. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.30) принимает вид

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r - r_1)(r - r_2)} = \frac{(r - r_1) + (r - r_2) - 2\mu\Delta}{2(r - r_1)(r - r_2)}, \tag{2.2}$$

где

$$\mu = \frac{2C - r_1 - r_2}{2\Delta}. \tag{2.3}$$

Тогда, делая подстановку

$$\rho = \frac{r - r_1}{r - r_2}, \tag{2.4}$$

решение уравнения (1.11) можно записать так

$$h^2 e^{-2\phi} = B^2 (r - r_1)(r - r_2) \left(\frac{r - r_2}{r - r_1}\right)^{2\mu} = B^2 \frac{\rho^{1-2\mu}\Delta^2}{(1-\rho)^2}, \tag{2.5}$$

или

$$h^2 = B^2 \Delta^2 e^{2\phi} \frac{\rho^{1-2\mu}}{(1-\rho)^2}, \tag{2.6}$$

где B - константа интегрирования. Учитывая соотношение (1.1), получим

$$f^2 = \frac{(r - r_1)(r - r_2)}{h^2} = \frac{\rho^{2\mu}}{B^2 e^{2\phi}}. \tag{2.7}$$

Используя обозначение (2.30), уравнение (1.31) можно привести к виду

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{(1-2\mu)}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2} = 0. \tag{2.8}$$

2.1. Тип AI ($r_1 - r_2 > 0$, $\mu \neq 0$)

В случае $\mu \neq 0$ решение уравнение (2.8) имеет вид

$$e^{2\phi} = D^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right) \rho^{\mu - 1/(4\mu)}. \tag{2.9}$$

А следствием уравнений (2.6), (2.7) и (1.28) является

$$h^2 = B^2 D^2 \Delta^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right) \frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{2.10}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{B^2 D^2 \exp\left(\frac{D_1}{\mu}\rho^{2\mu}\right)}, \tag{2.11}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e (1-\rho)^2}{B^2 \Delta^2 \rho^{1-2\mu}}. \tag{2.12}$$

Подстановка выражений (1.1),(2.10) и (2.11) в (1.3) или (1.4) дает

$$2\mu D_1 B^2 \Delta^2 + Q_e^2 = 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, общее решения типа AI есть

$$e^{2\phi} = D^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2 \rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2 \Delta^2}\right) \rho^{\mu - 1/(4\mu)}. \tag{2.14}$$

$$h^2 = B^2 D^2 \Delta^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2 \rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2 \Delta^2}\right) \frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{2.15}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{B^2 D^2 \exp\left(-\frac{Q_e^2 \rho^{2\mu}}{2\mu^2 B^2 \Delta^2}\right)}, \tag{2.16}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e (1-\rho)^2}{B^2 \Delta^2 \rho^{1-2\mu}}. \tag{2.17}$$

$$\rho = \frac{r - r_1}{r - r_2}. \tag{2.18}$$

2.2. Тип AI $(r_1 - r_2 > 0,\ \mu \neq 0)$. *Асимптотически плоское решение.*

Требуя, чтобы $e^{2\phi} \to 1$ и $f^2 \to 1$ при $\rho \to 1$, получим

$$B^2 = 1, \qquad D^2 = \exp\left(\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right). \tag{2.19}$$

Таким образом, асимптотически плоские решения типа AI имеют вид

$$e^{2\phi} = \exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]\rho^{\mu-1/(4\mu)}. \tag{2.20}$$

$$h^2 = \Delta^2 \exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]\frac{\rho^{1-\mu-1/(4\mu)}}{(1-\rho)^2}, \tag{2.21}$$

$$f^2 = \frac{\rho^{\mu+1/(4\mu)}}{\exp\left[\left(1-\rho^{2\mu}\right)\frac{Q_e^2}{2\mu^2\Delta^2}\right]}, \tag{2.22}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{\Delta^2\rho^{1-2\mu}}, \tag{2.23}$$

$$\rho = \frac{r-r_1}{r-r_2}. \tag{2.24}$$

Это решение определяется четырьмя константами интегрирования:r_1, r_2, μ, Q_e.

Выразим константы Δ и μ через асимптотическую массу M, дилатонный заряд Q_d. Для этого разложим f^2 при $r \to \infty$

$$f^2 = 1 - \left[\frac{Q_e^2}{\mu\Delta} + \Delta\left(\mu + \frac{1}{4\mu}\right)\right]\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{2.25}$$

что дает

$$M = \frac{Q_e^2}{2\mu\Delta} + \Delta\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{8\mu}\right). \tag{2.26}$$

Вычисление дилатонного заряда (1.5) дает

$$Q_d \;=\; \lim_{r\to\infty}\left[h^2\left(\phi'_r - \frac{F_{rt}A^t}{e^{2\phi}f^2}\right)\right] = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi'_r\right] = -\frac{Q_e^2}{2\mu\Delta} + \frac{\mu\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8\mu}. \tag{2.27}$$

Система уравнений (2.26, 2.27) сводится к

$$M + Q_d = \mu\Delta, \tag{2.28}$$

$$M - Q_d = \frac{Q_e^2}{\mu\Delta} + \frac{\Delta}{4\mu}. \tag{2.29}$$

Из этих соотношений найдём

$$\mu = \frac{M+Q_d}{2\sqrt{M^2-Q_d^2-Q_e^2}} \neq 0. \tag{2.30}$$

$$\Delta \equiv r_1 - r_2 = 2\sqrt{M^2-Q_d^2-Q_e^2} > 0. \tag{2.31}$$

При этом r_2 может быть любым действительным числом, поскольку произвол в выборе начала отсчета на оси r ($\tilde{r} = r - const$) ничего не меняет в этом решении.

Частным случаем этого решения, соответствующим $\mu = 1/2, r_2 = 0$ ($r \geq r_1 = 2\sqrt{M^2-Q_d^2-Q_e^2}$ $= 2(M+Q_d) = -\dfrac{Q_e^2}{Q_d} > 0$), является

$$e^{2\phi} = e^{-2Q_d/r}, \tag{2.32}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{r^2}, \tag{2.33}$$

$$ds^2 = -e^{2Q_d/r}\left[1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}\right]dt^2 + e^{-2Q_d/r}\left[\frac{dr^2}{1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \qquad (2.34)$$

что совпадает с формулой (2.24) работы [7] с точностью до обозначений. Условие горловины в данном случае имеет вид

$$0 = \frac{dh^2}{dl} = \frac{dh^2}{dr}\frac{dr}{dl} = 2e^{-Q_d/r}(r+Q_d)\sqrt{1 - \frac{2(M+Q_d)}{r}}. \qquad (2.35)$$

А радиус горловины, находящийся перед перед горизонтом $r_g = 2(M+Q_d) = -\frac{Q_e^2}{Q_d}$, равен $r_{throat} = -Q_d$, если $-Q_d > 2(M+Q_d) > 0$ или $-3Q_d > 2M > -2Q_d$.

2.3. Тип AII ($r_1 - r_2 > 0$, $\mu = 0$)

В случае $\mu = 0$ решение уравнение (2.8) имеет вид

$$\phi = \frac{(\ln\rho)^2}{8} + \frac{\text{const}}{2}\ln\rho + \frac{\ln K^2}{2} \qquad (2.36)$$

или

$$e^{2\phi} = K^2\rho^{\frac{\ln\rho}{4}+\text{const}}, \qquad (2.37)$$

$$h^2 = B^2K^2\Delta^2\frac{\rho^{\frac{\ln\rho}{4}+1+\text{const}}}{(1-\rho)^2}, \qquad (2.38)$$

$$f^2 = \frac{1}{B^2K^2\rho^{\frac{\ln\rho}{4}+\text{const}}} \qquad (2.39)$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e(1-\rho)^2}{B^2\Delta^2\rho} \qquad (2.40)$$

Подстановка этих выражений в (1.3) или (1.4) дает

$$4Q_e^2 + B^2\Delta^2 = 0. \qquad (2.41)$$

Это означает, что решение в случае $r_1 - r_2 > 0$, $\mu = 0$ отсутствует.

3. Тип B ($r_1 = r_2$)

Если

$$\Delta = r_1 - r_2 = 0, \qquad (3.1)$$

то уравнение (1.30) дает

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r - C}{(r-r_1)^2} \qquad (3.2)$$

или

$$\frac{h^2}{e^{2\phi}} = D^2(r-r_1)^2\exp\left[\frac{2(C-r_1)}{(r-r_1)}\right]. \qquad (3.3)$$

Учитывая выражения (1.1) и (3.1), получим

$$f^2h^2 = (r-r_1)^2 \qquad (3.4)$$

или

$$f^2 = \frac{1}{D^2\exp\left[2\phi + 2\frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right]}. \qquad (3.5)$$

Уравнение (1.31) сведется в этом случае к

$$\phi''_{rr} + 2\frac{r-C}{(r-r_1)^2}\phi'_r + \frac{(C-r_1)^2}{(r-r_1)^4} = 0. \qquad (3.6)$$

3.1. Тип BI ($r_1 = r_2, C \neq r_1$)

Решение уравнения (3.6) в случае $C \neq r_1$ есть

$$\phi = \frac{1}{2}\ln(D_1^2) + \frac{D_2}{2(C-r_1)} e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{2(r-r_1)}. \tag{3.7}$$

Таким образом,

$$e^{2\phi} = D_1^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C-r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.8}$$

$$h^2 = D^2 D_1^2 (r-r_1)^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C-r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.9}$$

$$f^2 = \frac{1}{D^2 D_1^2 \exp\left[\frac{D_2}{(C-r_1)}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right]}, \tag{3.10}$$

$$F_{rt} = Q_e \frac{e^{2\phi}}{h^2} = \frac{Q_e}{D^2 (r-r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{3.11}$$

Подстановка (3.8), (3.9) и (3.10) в (1.3) и (1.4) дает

$$D_2 = -\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)}. \tag{3.12}$$

Следовательно, общее решение для типа BI есть

$$e^{2\phi} = D_1^2 \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.13}$$

$$h^2 = D^2 D_1^2 (r-r_1)^2 \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.14}$$

$$f^2 = \frac{1}{D^2 D_1^2} \exp\left[\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\, e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)} - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.15}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{D^2 (r-r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{3.16}$$

3.2. Тип BI ($r_1 = r_2, C \neq r_1$)*. Асимптотически плоское решение*

Требуя, чтобы $\phi \to 0$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$, получим

$$D_1^2 = \exp\left[\frac{Q_e^2}{2D^2(C-r_1)^2}\right],\ D^2 = 1. \tag{3.17}$$

Поэтому асимптотически плоское решение типа BI есть

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.18}$$

$$h^2 = (r-r_1)^2 \exp\left[\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) + \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.19}$$

$$f^2 = \exp\left[-\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)^2}\left(1 - e^{-2(C-r_1)/(r-r_1)}\right) - \frac{(C-r_1)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.20}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{(r-r_1)^2\, e^{2(C-r_1)/(r-r_1)}}. \tag{3.21}$$

Раскладывая f^2 (3.20) по степеням $1/r$, получим

$$f^2 = 1 - \frac{[Q_e^2 + (C-r_1)^2]}{(C-r_1)}\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{3.22}$$

или
$$M=\frac{(C-r_1)}{2}+\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)}. \tag{3.23}$$

Вычисление дилатонного заряда дает
$$Q_d=\lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi_r'\right]=\frac{(C-r_1)}{2}-\frac{Q_e^2}{2(C-r_1)}. \tag{3.24}$$

Таким образом,
$$Q_e^2=M^2-Q_d^2,\ C-r_1=M+Q_d, \tag{3.25}$$

что позволяет переписать асимптотически плоское решение типа BI следующим образом
$$e^{2\phi}=\exp\left[\frac{(M-Q_d)}{2(M+Q_d)}\left(1-e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right)-\frac{(M+Q_d)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.26}$$
$$h^2=(r-r_1)^2\exp\left[\frac{(M-Q_d)}{2(M+Q_d)}\left(1-e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right)+\frac{(M+Q_d)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.27}$$
$$f^2=\exp\left[-\frac{(M-Q_d)}{2(M+Q_d)}\left(1-e^{-2(M+Q_d)/(r-r_1)}\right)-\frac{(M+Q_d)}{(r-r_1)}\right], \tag{3.28}$$
$$F_{rt}=\frac{\sqrt{M^2-Q_d^2}}{(r-r_1)^2\,e^{2(M+Q_d)/(r-r_1)}}, \tag{3.29}$$
$$Q_e^2=M^2-Q_d^2,\ M+Q_d\neq 0. \tag{3.30}$$

3.3. Тип BII $(r_1=r_2, C=r_1)$

Решение уравнения (3.6) в случае $C\neq r_1$ есть
$$\phi=\frac{\ln(L_1^2)}{2}+\frac{L_2}{2(r-r_1)}. \tag{3.31}$$

Учитывая (3.3) и (3.5), получим
$$e^{2\phi}=L_1^2e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{3.32}$$
$$h^2=D^2L_1^2(r-r_1)^2e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{3.33}$$
$$f^2=\frac{1}{D^2L_1^2}e^{-L_2/(r-r_1)}, \tag{3.34}$$
$$F_{rt}=Q_e\frac{e^{2\phi}}{h^2}=\frac{Q_e}{D^2(r-r_1)^2}. \tag{3.35}$$

Подстановка (3.32), (3.33) и (3.34) в (1.3) и (1.4) дает
$$Q_e=0. \tag{3.36}$$

3.4. Тип BII $(r_1=r_2, C=r_1)$*. Асимптотически плоское решение*

Требуя, чтобы $\phi\to 0$ и $f^2\to 1$ при $r\to\infty$, получим
$$L_1^2=1,\ D^2=1. \tag{3.37}$$

Поэтому асимптотически плоское решение типа BII есть
$$e^{2\phi}=e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{3.38}$$
$$h^2=(r-r_1)^2e^{L_2/(r-r_1)}, \tag{3.39}$$
$$f^2=e^{-L_2/(r-r_1)}, \tag{3.40}$$
$$F_{rt}=0. \tag{3.41}$$

Разложение (3.40) по степеням $1/r$ дает

$$M = L_2/2, \tag{3.42}$$

а вычисление дилатонного заряда дает

$$Q_d = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi'_r\right] = -\frac{L_2}{2}, \tag{3.43}$$

поэтому асимптотически плоское решение типа BII есть

$$e^{2\phi} = e^{2M/(r-r_1)}, \tag{3.44}$$

$$h^2 = (r-r_1)^2 e^{2M/(r-r_1)}, \tag{3.45}$$

$$f^2 = e^{-2M/(r-r_1)}, \tag{3.46}$$

$$F_{rt} = 0, \tag{3.47}$$

$$M = -Q_d,\ Q_e = 0. \tag{3.48}$$

4. Тип C ($r_1 = r_2^*$). Заряженные антидилатонные кротовые норы

Обозначим

$$r_1 = r_0 + iv, r_2 = r_0 - iv, \qquad v > 0, \tag{4.1}$$

тогда

$$f^2h^2 = (r-r_1)(r-r_2) = (r-r_0)^2 + v^2. \tag{4.2}$$

Введем еще одно обозначение

$$\kappa = \frac{r_0 - C}{2v}, \tag{4.3}$$

тогда уравнение (1.30) можно переписать так

$$\frac{h'_r}{h} - \phi'_r = \frac{r-C}{(r-r_1)(r-r_2)} = \frac{r-r_0+2v\kappa}{(r-r_0)^2+v^2}. \tag{4.4}$$

Его решение имеет вид

$$h^2e^{-2\phi} = A^2\left[(r-r_0)^2+v^2\right]e^{4\kappa\arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right)}. \tag{4.5}$$

Чтобы решить уравнение (1.31), введем новую переменную

$$\eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right). \tag{4.6}$$

Тогда уравнение (1.31) можно переписать так

$$\frac{\cos^4\eta}{v^2}\left(\frac{d^2\phi}{d\eta^2} + 4\kappa\frac{d\phi}{d\eta} + 1 + 4\kappa^2\right) = 0. \tag{4.7}$$

4.1. Тип CI ($r_1 = r_2^*, \kappa \neq 0$)

Решение уравнения (4.7) для $\kappa \neq 0$ есть

$$\phi = -\left(\kappa + \frac{1}{4\kappa}\right)\eta - \frac{C_1}{2}e^{-4\kappa\eta} + \frac{1}{2}\ln C_2^2. \tag{4.8}$$

Учитывая (4.6), а также (4.5) и (4.2), получим

$$e^{2\phi} = C_2^2\exp\left[-\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.9}$$

$$h^2 = \frac{A^2 C_2^2 v^2}{\cos^2\eta} \exp\left[\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.10}$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 C_2^2} \exp\left[-\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta + C_1 e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.11}$$

Подстановка (4.9), (4.10) и (4.11) в (1.3) и (1.4) дает

$$C_1 = \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2}. \tag{4.12}$$

Таким образом, общее статическое сферически симметричное решение типа CI есть

$$e^{2\phi} = C_2^2 \exp\left[-\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.13}$$

$$h^2 = \frac{A^2 C_2^2 v^2}{\cos^2\eta} \exp\left[\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta - \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.14}$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 C_2^2} \exp\left[-\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\eta + \frac{Q_e^2}{8A^2\kappa^2 v^2} e^{-4\kappa\eta}\right], \tag{4.15}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{A^2 v^2} e^{-4\kappa\eta} \cos^2\eta, \tag{4.16}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \tag{4.17}$$

4.2. Тип CI $(r_1 = r_2^*, \kappa \neq 0)$***. Асимптотически плоское решение.***

Требуя, чтобы $\phi \to 0$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty$, получим

$$A^2 = e^{-2\pi\kappa},\ C_2^2 = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\right]. \tag{4.18}$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right)\left(\pi - 2\eta\right) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\left(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}\right)\right], \tag{4.19}$$

$$h^2 = \frac{v^2}{\cos^2\eta} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\left(\pi - 2\eta\right) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\left(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}\right)\right], \tag{4.20}$$

$$f^2 = \exp\left[\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\left(\pi - 2\eta\right) - \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\left(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}\right)\right], \tag{4.21}$$

$$F_{rt} = Q_e \frac{\cos^2\eta}{v^2} e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}, \tag{4.22}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{v}\right). \tag{4.23}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$\begin{aligned} Q_d &= \lim_{r\to\infty}\left[h^2\left(\phi'_r - \frac{F_{rt}A^t}{e^{2\phi} f^2}\right)\right] = \lim_{r\to\infty}\left[h^2 \phi'_r\right] \\ &= \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\left\{v\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{4\kappa v^2} e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}\right]\right. \\ &\qquad \left.\exp\left[-\frac{1}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right)\left(\pi - 2\eta\right) + \frac{Q_e^2}{8\kappa^2 v^2}\left(1 - e^{2\kappa(\pi - 2\eta)}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.24}$$

или

$$Q_d = -\frac{v}{2}\left(2\kappa + \frac{1}{2\kappa}\right) + \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \tag{4.25}$$

Разложение f^2 (4.21) при $r \to \infty$ определяет асимптотическую массу

$$M = -\frac{v}{2}\left(2\kappa - \frac{1}{2\kappa}\right) - \frac{Q_e^2}{4\kappa v}. \tag{4.26}$$

Таким образом

$$v = \sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2} > 0,\ \kappa = -\frac{(Q_d + M)}{2\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}} \neq 0. \tag{4.27}$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \eta = \cos^2\left[\arctan\left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\right)\right] = \frac{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 + (r - r_0)^2}, \tag{4.28}$$

статическое асимптотически плоское решение типа CI принимает вид

$$\begin{aligned} e^{2\phi} = \exp & \left[-\frac{\left(2Q_d^2 + 2Q_d M + Q_e^2\right)}{2\,(Q_d + M)\,\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right. \\ & \left. + \frac{Q_e^2}{2\,(Q_d + M)}\left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} h^2 \ = \ & \left[(r - r_0)^2 + \left(Q_d^2 - M^2 + Q_e^2\right)\right] \exp\left[\frac{\left(2M^2 + 2Q_d M - Q_e^2\right)}{2\,(Q_d + M)\,\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right. \\ & \left. + \frac{Q_e^2}{2\,(Q_d + M)}\left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} f^2 = \exp & \left[-\frac{\left(2M^2 + 2Q_d M - Q_e^2\right)}{2\,(Q_d + M)\,\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right. \\ & \left. - \frac{Q_e^2}{2\,(Q_d + M)}\left(1 - e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{[(r - r_0)^2 + (Q_d^2 - M^2 + Q_e^2)]}\, e^{-(\pi - 2\eta)(Q_d + M)/\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}, \tag{4.32}$$

$$Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 > 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2 + Q_e^2}}\right). \tag{4.33}$$

В частном случае $Q_e = 0$ получим кротовую нору Бронникова-Эллиса

$$e^{2\phi} = \exp\left[-\frac{Q_d}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right], \tag{4.34}$$

$$h^2 = \left[(r - r_0)^2 + (Q_d^2 - M^2\ )\right] \exp\left[\frac{M}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right], \tag{4.35}$$

$$f^2 = \exp\left[\frac{-M}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}}\left(\pi - 2\eta\right)\right], \tag{4.36}$$

$$F_{rt} = 0, \tag{4.37}$$

$$Q_d^2 > M^2,\ M + Q_d \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r - r_0}{\sqrt{Q_d^2 - M^2}}\right). \tag{4.38}$$

Таким образом, решение типа CI описывает антидилатонную заряженную кротовую нору.

4.3. Тип CII $(r_1 = r_2^*, \kappa = 0)$

Решение уравнения (4.7) для $\kappa = 0$ есть

$$\phi = -\frac{\eta^2}{2} + \frac{F}{2}\eta + \frac{1}{2}\ln E^2. \tag{4.39}$$

Поэтому

$$e^{2\phi} = E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{4.40}$$

$$h^2 = \frac{A^2 v^2}{\cos^2\eta} E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{4.41}$$

$$f^2 = \frac{1}{A^2 E^2 e^{\eta(F-\eta)}}, \tag{4.42}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e \cos^2\eta}{A^2 v^2}, \tag{4.43}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right). \tag{4.44}$$

Подстановка (4.40), (4.41) и (4.42) в (1.3) и (1.4) дает

$$Q_e^2 = A^2 v^2. \tag{4.45}$$

Таким образом, статическое сферически симметричное решение в этом случае имеет вид

$$e^{2\phi} = E^2 e^{\eta(F-\eta)}, \tag{4.46}$$

$$h^2 = \frac{Q_e^2 E^2}{\cos^2\eta} e^{\eta(F-\eta)}, \tag{4.47}$$

$$f^2 = \frac{v^2}{Q_e^2 E^2 e^{\eta(F-\eta)}}, \tag{4.48}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2\eta}{Q_e}, \tag{4.49}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{v}\right),\ Q_e \neq 0. \tag{4.50}$$

4.4. Тип CII $(r_1 = r_2^*, \kappa = 0)$*. Асимптотически плоское решение.*

Требуя, чтобы $e^{2\phi} \to 1$ и $f^2 \to 1$ при $r \to \infty \left(\eta \to \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$E^2 = \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(F - \frac{\pi}{2}\right)\right],\ v^2 = Q_e^2 \neq 0. \tag{4.51}$$

Таким образом,

$$e^{2\phi} = e^{\left(\eta-\frac{\pi}{2}\right)\left(F-\frac{\pi}{2}-\eta\right)}, \tag{4.52}$$

$$h^2 = \frac{Q_e^2}{\cos^2\eta} e^{\left(\eta-\frac{\pi}{2}\right)\left(F-\frac{\pi}{2}-\eta\right)}, \tag{4.53}$$

$$f^2 = \frac{1}{e^{\left(\eta-\frac{\pi}{2}\right)\left(F-\frac{\pi}{2}-\eta\right)}}, \tag{4.54}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2\eta}{Q_e}, \tag{4.55}$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{r-r_0}{|Q_e|}\right),\ Q_e \neq 0. \tag{4.56}$$

Разложение f^2 (4.54) по степеням $1/r$ дает

$$f^2(r) = 1 - \frac{v(\pi - F)}{r}, \tag{4.57}$$

т.е. масса равна

$$M = \frac{v}{2}(\pi - F) = \frac{|Q_e|}{2}(\pi - F). \tag{4.58}$$

Вычисление дилатонного заряда дает

$$Q_d = \lim_{r\to\infty}\left[h^2\phi'_r\right] = \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\left[h^2\frac{\cos^2\eta}{v}\phi'_\eta\right] = \lim_{\eta\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{Q_e^2 e^{\left(\eta-\frac{\pi}{2}\right)\left(F-\frac{\pi}{2}-\eta\right)}}{v}\left(\frac{F}{2}-\eta\right)\right] \tag{4.59}$$

или

$$Q_d = \frac{Q_e^2(F-\pi)}{2v} = |Q_e|\frac{(F-\pi)}{2}. \tag{4.60}$$

Таким образом,

$$F = \pi - \frac{2M}{|Q_e|}, Q_d = -M. \tag{4.61}$$

Выбором начала на оси r можно добиться $r_0 = 0$, поэтому выражения (4.52)-(4.55) можно переписать в виде

$$e^{2\phi} = \exp\left[\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2M}{|Q_e|} - \eta\right)\right], \tag{4.62}$$

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{e^{2\phi}} + e^{2\phi}\left[dr^2 + \left(r^2 + Q_e^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \tag{4.63}$$

$$F_{rt} = \frac{\cos^2\eta}{Q_e} = \frac{Q_e}{r^2 + Q_e^2}, \tag{4.64}$$

$$Q_d = -M,\ Q_e \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right). \tag{4.65}$$

Это решение описывает кротовую нору, причем область $r \to -\infty$ также является асимптотически плоской. Однако $\phi(r \to -\infty) = \mathrm{const} \neq 0$. Положение горловины определяется уравнением

$$r - |Q_e|\arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right) + \frac{\pi|Q_e|}{2} - M = 0. \tag{4.66}$$

В частном случае

$$2M = \pi|Q_e| \tag{4.67}$$

получим

$$e^{2\phi} = e^{\pi^2/4-\eta^2}, \tag{4.68}$$

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{e^{\pi^2/4-\eta^2}} + e^{\pi^2/4-\eta^2}\left[dr^2 + \left(r^2 + Q_e^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \tag{4.69}$$

$$F_{rt} = \frac{Q_e}{r^2 + Q_e^2}, \tag{4.70}$$

$$Q_d = M = \frac{\pi}{2}|Q_e| \neq 0,\ \eta = \arctan\left(\frac{r}{|Q_e|}\right). \tag{4.71}$$

Это решение описывает симметричную на обоих асимптотиках ($r \to \pm\infty$) кротовую нору.

Заключение

В работе получены статические сферически симметричные асимптотически плоские решения теории Эйнштейна-Максвелла-анти-дилатона. Эти решения определяются массой M, электрическим Q_e и анти-дилатонным Q_d зарядами и в зависимости от величин этих зарядов разбиваются на пять типов:

тип AI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 < 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип BI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 = 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип BII: $Q_e = 0,\ M + Q_d = 0;$

тип CI: $Q_d^2 - M^2 + Q_e^2 > 0,\ M + Q_d \neq 0;$

тип CII: $Q_e \neq 0, M + Q_d = 0.$

Тип A соответствует черным дырам с двумя горизонтами. Тип B соответствует экстремальным черным дырам (два горизонта совпадают). Тип C соответствует кротовым норам.

Рассмотренные в этой работе решения соответствуют случаю $\lambda = -1$ статьи [8]. Решения типов AI, BI, CI совпадают с соответствующими решениями этой работы. Решения типов BII и CII являются новыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boulware D.J. and Deser S. Effective gravity theories with dilations // Phys. Lett. B. 1986. Vol. 175. P. 409–412.
2. Koikawa T. and Yoshimura M. Dilaton fields and event horizon // Phys. Lett. B. 1987. Vol. 189. P. 29–33.
3. Gibbons G.W. and Maeda K. Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields // Nucl. Phys. B. 1988. Vol. 298. P. 741–775.
4. Yoshimura M. Peculiar Feature of Forces in Dilaton and Kaluza-Klein Theories // Prog. Theor. Phys. 1989. Vol. 81. P. 576–579.
5. Marcus N. Gen. Rel. Grav. 22 (1990) 873.
6. Garfinkle D., Horowitz G.T. and Strominger A. Charged black holes in string theory // Phys. Rev. D. 1991. Vol. 43. P. 3140.
7. Gibbons G.W., Rasheed D.A. Dyson pairs and zero mass black holes // Nucl. Phys. B. 1996. Vol. 476. P. 515–547.
8. Clément G., Fabris J., Rodrigues M. Phantom black holes in Einstein-Maxwell-dilaton theory // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 79. P. 064021.

Поступила в редакцию 20.03.2015

Попов Аркадий Александрович, д. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики т математического моделирования, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.
E-mail: apopov@ksu.ru

A. A. Popov

Static sphercally symmetric solutions in 4D Einstein-Maxwell-anti-dilaton theory

Keywords: gravitation, anti-dilaton, static spherically symmetric solution.

PACS: 04.20.Jb

We obtain the static spherically symmetric asymptotically flat solution for the Einstein-Maxwell-anti-dilaton system in four dimensions. This leads to new classes of wormhole solutions.

REFERENCES

1. Boulware D.J. and Deser S. Effective gravity theories with dilations, *Phys. Lett. B.*, 1986. Vol. 175. P. 409–412.

2. Koikawa T. and Yoshimura M. Dilaton fields and event horizon, *Phys. Lett. B.*, 1987. Vol. 189. P. 29–33.

3. Gibbons G.W. and Maeda K. Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields, *Nucl. Phys. B.*, 1988. Vol. 298. P. 741–775.

4. Yoshimura M. Peculiar Feature of Forces in Dilaton and Kaluza-Klein Theories, *Prog. Theor. Phys.*, 1989. Vol. 81. P. 576–579.

5. Marcus N. *Gen. Rel. Grav.*, 22 (1990) 873.

6. Garfinkle D., Horowitz G.T. and Strominger A. Charged black holes in string theory, *Phys. Rev. D.*, 1991 Vol. 43. P. 3140.

7. Gibbons G.W., Rasheed D.A. Dyson pairs and zero mass black holes, *Nucl.Phys. B.*, 1996. Vol. 476. P. 515–547.

8. Clément G., Fabris J., Rodrigues M. Phantom black holes in Einstein-Maxwell-dilaton theory, *Phys. Rev. D.*, 2009. Vol. 79. P. 064021.

Received 20.03.2015

Popov Arkady Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, associate professor, Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: apopov@ksu.ru