

УДК 53.01+530.145.1+537.112+539.1+51-71

*B. M. Журавлев<sup>1</sup>*

**ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ.  
ЧАСТЬ I. ЗАРЯД И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ<sup>2</sup>**

В работе излагается новый подход к построению теории электромагнитного и гравитационного взаимодействий на основе геометрической интерпретации соответствующих полей с привлечением топологических инвариантов для описания электрических зарядов. В первой части работы излагаются основные элементы теории электромагнитного взаимодействия в новой геометрической интерпретации и ее связь с квантовой теорией элементарных частиц. Во второй части развивается аппарат описания полей тяготения, близкий к теории тяготения Ньютона и исследуются некоторые следствия из него. В частности обсуждается вопрос об интерпретации эффекта скрытой массы или «темной материи». Указывается на тесную связь полей тяготения с электромагнитными полями в рамках данной концепции.

**Ключевые слова:** Топологическая интерпретация электрического заряда и массы, геометризация электродинамики, квантовая теория, теория гравитации

**PACS:** 02.40.-k, 03.65.-w, 04.50.Kd, 11.90.+t

## Введение

«.... профессор Уилер сказал:  
— «Фейнман! Я знаю, почему у всех электронов  
одинаковый заряд и одинаковая масса».  
— «Почему же?»  
— «Потому что всё это один и тот же электрон».

Р.Фейнман, Нобелевская лекция

В работах [1, 1, 2, 2] была предложена концепция тополого-геометрического описания «классических» электромагнитных полей с целочисленным зарядом. Термин «классические» относится здесь к тому, что изначально описание всех полей строится на основе абсолютного пространства, не зависимого от времени, но размерности на единицу большего, чем трёхмерное пространство классической механики. Это означает, что релятивистские эффекты при больших скоростях движения частиц материи в данной теории должны появиться не с помощью постулата конечности скорости света СТО, которое вводится «руками», а в результате выяснения свойств частиц, которые появляются в данной концепции. То, что такая возможность появляется в рамках данного подхода, следует из того, что в её рамках [1] из простых геометрических и топологических представлений выводятся уравнения электродинамики с точечными целочисленными зарядами, движение которых описывается уравнениями Шредингера и в среднем уравнениями Ньютона. В настоящей работе решается ряд проблем, которые не были решены в рамках предыдущих работ по построению данной теории. Одной из целей данной работы является уточнение ряда формулировок и уравнений, выведенных в предыдущих работах. Поэтому здесь повторяется вывод основных уравнений, где необходимы такие уточнения. Но главной целью является введение в теорию гравитационного поля, которое не было описано в предыдущих работах, хотя его существование было обозначено наличием некоторых «остаточных» потенциалов в уравнениях Ньютона и Шредингера по отношению к потенциалам и полям, интерпретируемым, как характеристики электромагнитных полей.

Предлагаемая концепция строится на новой топологической интерпретации электрического заряда в форме топологического инварианта пространства - эйлеровой характеристике выделенных геометрическим способом областей трёхмерного пространства. Развитие этой концепции в [1] позволило установить связь между построенным в её рамках описанием электромагнитных полей с

<sup>1</sup>E-mail: zhvictorm@gmail.com

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015)

квантовой теорией частиц. Последнее создало базу для обоснования предложенной в [1, 2] топологической классификации элементарных частиц, как областей пространства с геометрическим способом выделенными границами.

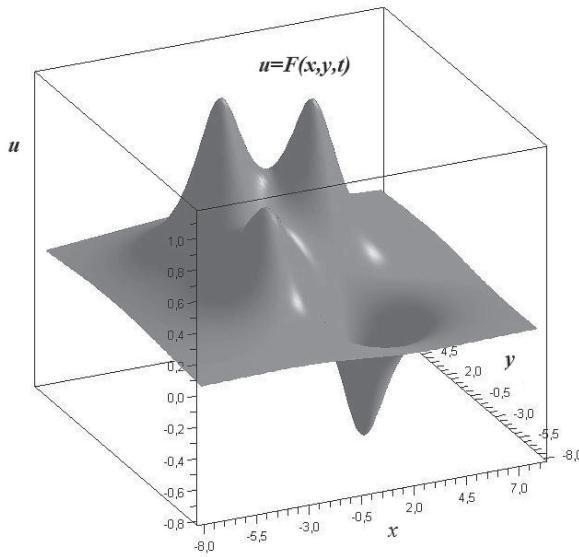
Идея объяснения дискретности электрического заряда с помощью его интерпретации, как некоторой топологической характеристики пространства, впервые была высказана Дж. Уилером [5–7]. Эта идея кажется сейчас вполне естественной, поскольку целочисленная величина, которая является инвариантной в физическом смысле и независимой от расположения и движения всех типов материи, должна быть инвариантом очень высокого уровня, т.е. именно топологическим инвариантом. Единственное, что необходимо выяснить при реализации такой идеи – это то, какой топологический инвариант должен быть сопоставлен электрическому заряду? Во-первых, заряд может быть топологическим инвариантом конфигурации полевых структур, заданных на пространстве, или может быть топологическим инвариантом самого пространства или, возможно, пространства-времени. Дж. Уилер полагал, опираясь на идеи Общей теории относительности (ОТО), что заряд должен быть топологическим инвариантом пространства или пространства-времени. Однако в квантовой теории поля (КТП) для описания дискретных характеристик зарядовых чисел пытались использовать топологические инварианты полевых структур – топологические заряды [8, 10, 12]. Различие в выборе между этими двумя возможностями в разных теориях, очевидно, связано с трудностями объединения ОТО с КТП, но с точки зрения математики может и не иметь принципиального значения, поскольку топологические свойства полей наследуют топологические свойства самого пространства, на котором они заданы. В такой ситуации приходится опираться на какие-то фундаментальные представления о пространстве и пространстве-времени. Поскольку само понятие физического поля в форме гравитационного и электромагнитного основано на представлении о некотором состоянии окружающего нас «пустого» пространства, то более естественным и фундаментальным является подход, основанный на геометризации этих полей. Эта идея восходит к идеям Клиффорда [9] и предполагалась к реализации в ОТО, но не была воспроизведена в ней в полном объёме.

В [1, 1, 2, 2] было показано, что сочетание упрощённого по сравнению с ОТО геометрического подхода с использованием идеи о топологическом происхождении электрического заряда, а в последствии и барионного, позволяет из простых соображений построить электродинамику с целочисленным зарядом и квантовую теорию частиц [1]. Такой подход, хотя и не содержит полного решения всех проблем, связанных с современными представлениями и экспериментальными фактами теории элементарных частиц, тем не менее даёт основание надеяться получить достаточно полную их теорию. Упомянутое упрощение геометрического подхода по сравнению с ОТО состоит в том, что геометрическая часть концепции строится на предположении, что физическое трёхмерное риманово пространство может быть вложено в пространство четырёх измерений, что позволяет всю его геометрию описывать только одной функцией высоты, вместо метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени, содержащего 10 независимых компонент.

Вместе с тем, в общей структуре концепции, изложенной в [1, 1, 2, 2], имеется важный недостаток, связанный с тем, что в этой теории не содержалось объяснений того, как в ней может появиться поле тяготения. Хотя теория изначально строилась как геометрическая, т.е. такие поля как электромагнитное и, вообще, структура частиц связывались с пространством, обладающим римановой геометрией, однако в ней отсутствовало именно поле тяготения, интерпретируемое в ОТО как проявление геометрии пространства-времени. Хотя с современной точки зрения для теории, которая описывает частицы на микроуровне, совсем не обязательно ещё включать в описание поле гравитации, однако его отсутствие делало всю картину явно незаконченной. В настоящей работе предлагается закрыть этот пробел с помощью введения в теорию поля тяготения, опираясь на те же принципы, которые использовались для описания электромагнитного поля и элементарных частиц.

## 1. Электрический заряд и геометрия пространства

Следуя работе [1], вначале рассмотрим некоторые основные элементы геометрии и топологии пространства, важные для описания физических полей. Будем пока полагать, что движения рассматриваемых объектов происходят с такими скоростями, что можно пренебречь релятивистскими эффектами. Поэтому время  $t$  является абсолютным. Необходимость введения релятивистской инвариантности будет обсуждаться по ходу изложения. Как и в [1] будем предполагать, что на малых расстояниях вблизи точечного заряда пространство имеет некоторую кривизну и является неевклидовым. Вместе с тем, локальное увеличение кривизны пространства на малых масштабах



**Рис. 1.** Двумерный аналог гиперповерхности, заданной с помощью функции высоты  $u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$

воспринимается нами, как увеличение плотности энергии материи вблизи этой точки, в то время, как наши представления о метрических свойствах самого пространства остаются связанными с «фоновым», окружающим нас, евклидовым пространством  $P^3$  размерности  $d = 3$ . В результате у нас возникает представление о характере пространственных изменений физических величин вблизи точечного заряда, соответствующее фоновому пространству, а не реальному - физическому. Для наглядности мы можем обратиться к представлению такой ситуации с помощью терминов внешней геометрии. Положим, что наше физическое пространство  $V^3$  представляет собой гиперповерхность трёх измерений в объемлющем евклидовом пространстве  $W^4$ , имеющем размерность  $d = 4$ . Такая гиперповерхность может быть задана с помощью функции высоты  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ , т.е. с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

где  $u$  - дополнительная четвертая координата в объемлющем пространстве  $W^4 = T_u \times P^3$ , а  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  - декартовы координаты в ортогональной к направлению  $u$  гиперплоскости  $P^3$  в объемлющем пространстве. Пример двумерной гиперповерхности приведен на рис. (1). Эта гиперплоскость  $P^3$  рассматривается как фоновое евклидово пространство и должна быть связана с системой отсчёта. Геометрия гиперповерхности  $V^3$  полностью определяется функцией высоты  $\mathcal{F}$ . Сама функция  $\mathcal{F}$  определяется выбором системы координат в объемлющем евклидовом пространстве  $W^4$ . Поскольку гиперплоскость  $P^3$  отождествляется с системой отсчёта, то при заданной системе отсчёта функция  $\mathcal{F}$  определена однозначно. Мы не будем пока обсуждать вопрос о том, как меняется функция  $\mathcal{F}$  при переходе от одной системы отсчёта к другой и физический смысл таких преобразований. Хотя этот вопрос является существенным, тем не менее его можно отложить до тех пор, пока не будут сформулированы все основные принципы описания материальных объектов и полей в рамках данной концепции.

Будем предполагать, что физическая гиперповерхность является гладкой, а ее функция высоты  $\mathcal{F}$  является функцией Морса, т.е. эта функция имеет только изолированные критические точки (т.е. экстремумы и седловые точки). Для описания конструкции частиц и полей, связанных с этой гиперповерхностью, введем несколько определений.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  - функция Морса, заданная на трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$ . Будем называть **топологической ячейкой**, связанной с функцией  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , открытую область пространства, ограниченную какой-либо изоповерхностью функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . Топологическую ячейку будем называть **простой**, если топологическая ячейка является компактной и содержит единственную критическую точку - экстремум, лежащий строго внутри топологической ячейки.

Простой **пределью** топологической ячейкой будем называть простую топологическую ячейку, если её границей является особая изоповерхность функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , т.е. изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . **Пустой** топологической ячейкой будем называть топологическую ячейку, в которой нет ни одной критической точки функции  $\mathcal{F}$ . В топологии простые топологические ячейки называют клетками [15], но в данной работе мы будем использовать введенный здесь термин - простые топологические ячейки. Важным является то, что согласно общей теории Морса [14, 15], любая область, ограниченная изоповерхностью функции Морса, может быть представлена объединением простых и пустых топологических ячеек, границами которых являются особые изоповерхности. По определению **особой изоповерхностью** функции Морса называется изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка.

Рассмотрим на физической гиперповерхности  $V^3$  внутри одной простой топологической ячейки  $\mathcal{V}$  криволинейную систему координат  $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$ , которая связана с функцией высоты  $\mathcal{F}$  с помощью уравнений:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon e^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (1.2)$$

Функции:

$$e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$$

описывают отображение  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  гиперплоскости  $P^3$  в  $V^3$  внутри топологической ячейки  $\mathcal{V}$ . Величина  $\varepsilon = \pm 1$  в (1.2) зависит от того, достигает ли  $\mathcal{F}$  максимума ( $\varepsilon = -1$ ) или минимума ( $\varepsilon = +1$ ) внутри простой ячейки в точке  $P_0(\mathbf{x}_0, t)$  с координатами  $\mathbf{x}_0$ , являющейся образом начала координат  $e^a$ , т.е. точки, в которой  $e^a(\mathbf{x}_0, t) = 0$ . Это означает:

$$\varepsilon = \text{sign} \det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_0}. \quad (1.3)$$

Следствием (1.2) является соотношение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} e^a = \varepsilon \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x^\beta}.$$

Отсюда находим, что в окрестности точки  $P_0$ , точнее в простой топологической ячейке  $\mathcal{V}$ , функция  $\mathcal{F}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{F} = \varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{x})|^2 / 2 + \mathcal{F}_0, \quad (1.4)$$

где  $\mathcal{F}_0$  - значение функции  $\mathcal{F}$  в точке  $P_0$ :  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$ , где она достигает локального экстремума: минимума или максимума, в зависимости от знака  $\varepsilon$ , что и отражает соотношение (1.3). Пусть  $\mathcal{F}_s$  - значение функции  $\mathcal{F}$  на границе простой топологической ячейки, а  $\mathcal{F}_0$  - значение этой функции в экстремуме, лежащем внутри этой ячейки. Тогда каждая изоповерхность функции  $\mathcal{F}$ , соответствующая некоторому значению этой функции  $\mathcal{F}_1 \in [\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_0]$ , отображается в двумерную сферу радиуса:

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0|} \quad (1.5)$$

на декартовой карте системы координат  $e^a$  (см. рис. (2)). Поскольку соотношение (1.5) может быть однозначным только на каждой простой топологической ячейке, то в целом отображение  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{x}$ , включающее координатные карты  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  на всех простых топологических ячейках, является многолистным. Каждый лист отображения соответствует одной и только одной простой или пустой топологической ячейке. Иллюстрация геометрического смысла отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  представлена на рис. (2).

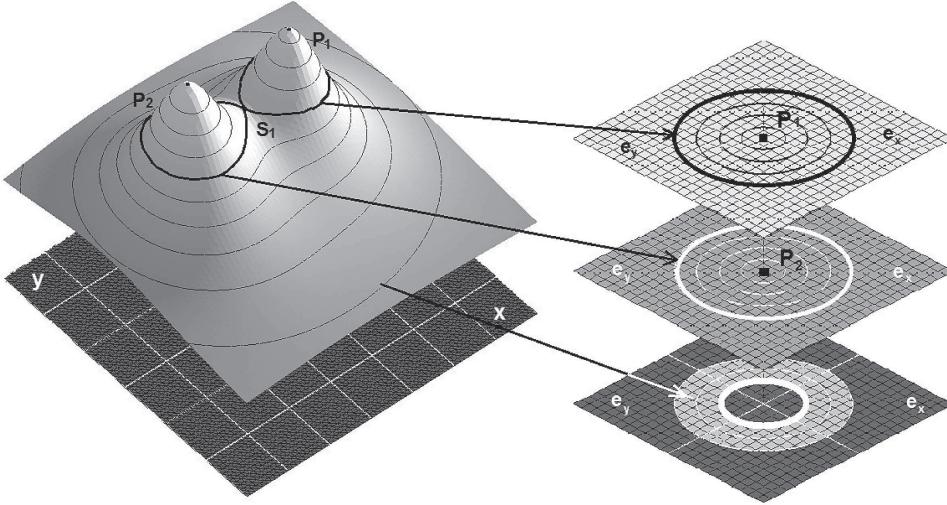
Как показано в [1], физический смысл выбора в качестве связи между функцией  $\mathcal{F}$  и  $e^a(\mathbf{x}, t)$  системы уравнений (1.2) или её эквивалента (1.4) состоит в том, что при таком выборе экстремумы и седловые точки функции  $\mathcal{F}$  становятся эквивалентными системе точечных целочисленных зарядов, динамика которых описывается с помощью уравнений Максвелла.

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{V}$  - простая топологическая ячейка функции Морса  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . Пусть  $e^a(\mathbf{x})$ ,  $a = 1, 2, 3$  - три дифференцируемые функции координат на  $\mathcal{V}$ , удовлетворяющие уравнению (1.4):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{e}|^2,$$

где  $|\mathbf{e}|^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$ ,  $\mathcal{F}_0$  - значение функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  в экстремуме с координатами  $\mathbf{x}_0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0, \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0),$$



**Рис. 2.** Двумерный аналог функции  $\mathcal{F}$  с седловой точкой  $S_1$ .  $P_1$  и  $P_2$  - экстремумы, лежащие внутри клеток, ограниченных особой изоповерхностью. Особая изоповерхность выделена жирной линией.

лежащем в  $\mathcal{V}$  ( $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ ), а  $\varepsilon = -1$  в случае, если экстремум - максимум, и  $\varepsilon = +1$  - если минимум. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (1.6)$$

где:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \mathcal{K}^\alpha, \quad \mathcal{K}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a, \quad (1.7)$$

и

$$J = \det \left( \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right). \quad (1.8)$$

**Доказательство.** Пусть  $e^a(\mathbf{x})$  - произвольная тройка дифференцируемых функций, заданных на  $\mathcal{V}$  и удовлетворяющая соотношению (1.4). В качестве такой тройки функций достаточно взять тройку функций вида:

$$e^1 = R(\mathbf{x}) \cos \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^2 = R(\mathbf{x}) \sin \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^3 = R(\mathbf{x}) \cos \Theta(\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

где  $\Phi(\mathbf{x})$  и  $\Theta(\mathbf{x})$  - произвольные дифференцируемые функции и

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0|}.$$

Рассмотрим формальное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} = \delta(\mathbf{e}), \quad (1.10)$$

где  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(e^1)\delta(e^2)\delta(e^3)$  -  $\delta$  - функция Дирака. Это тождество выполняется для любой области значений функций  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ , содержащей нулевое их значение. Такие области значений соответствуют области определения  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  с  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Переходя в (1.10) к координатам  $\mathbf{e}$  получаем:

$$\frac{1}{|J|} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} \right] = \frac{1}{|J|} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где использованы известные свойства  $\delta$  - функции Дирака. Отсюда следует соотношение (1.6), что доказывает сформулированное утверждение.

Уравнение (1.6) для поля  $\mathbf{D}$  с компонентами  $D^\alpha$  можно рассматривать как уравнение для поля индукции электрического точечного заряда с величиной равной  $q = \varepsilon = \pm 1$ . Такая конструкция строится для каждой простой топологической ячейки. Следовательно, объединяя координатные

карты на всех простых ячейках, можно построить глобальное поле  $\mathbf{D}$  с источниками в виде совокупности точечных зарядов, совпадающих с экстремумами функции  $\mathcal{F}$  на  $P^3$ . Для решения такой задачи необходимо решить две основные проблемы. Во-первых, доказать, что внутри пустых топологических ячеек нет зарядов, а во-вторых, что точечные заряды соответствуют седловым точкам функции  $\mathcal{F}$ .

## 2. Заряд и эйлерова характеристика

Для того, чтобы решить обе эти проблемы, рассмотрим в качестве следующего объекта пустую топологическую ячейку. Пусть  $\mathcal{S}$  - замкнутая изоповерхность  $\mathcal{F}$  с её значением, равным  $\mathcal{F}_0$ . Связь между изоповерхностью и значением функции на ней будем изображать в следующем виде:  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$ . В силу изолированности критических точек функции Морса всегда существует такая изоповерхность  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$  со значением функции  $\mathcal{F}$ , равным  $\mathcal{F}_1$ , что топологическая ячейка  $\mathcal{V}_{01}$ , ограниченная одновременно изоповерхностями  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$  и  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$  ( $\partial\mathcal{V}_{01} = \mathcal{S}[\mathcal{F}_0] \cup \mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$ ), является пустой. Для определённости будем полагать  $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_1$ . Условие пустоты означает, что для всех значений  $\mathcal{F}$ , лежащих на интервале  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ :  $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_s < \mathcal{F}_1$ , изоповерхности  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  не являются особыми. Тогда на топологической ячейке определено отображение  $\mathfrak{F}$  с помощью соотношения (1.4):

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{e}|^2$$

и поле  $\mathbf{D}$  (1.7). Обратим теперь внимание на то, что тождество (1.10) выполняется внутри  $\mathcal{V}$  при произвольном выборе изоповерхности  $\mathcal{F}_0$ . При этом носитель  $\delta$ -функции в правой части после отображения в координаты  $\mathbf{x}$  сосредоточен на изоповерхности  $\mathcal{F}_0$ . Поэтому везде внутри  $\mathcal{V}_{01}$  выполнено тождество:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}|_{\mathbf{x} \notin \mathcal{S}_0} = 0. \quad (2.1)$$

Исключение составляет изоповерхность со значением  $\mathcal{F}_0$ , на которой по определению  $|\mathbf{e}|^2 = 0$ , что соответствует точечному носителю  $\delta$ -функции в (1.10). В силу выполнения условия (2.1) можно констатировать, что поток через каждую изоповерхность внутри  $\mathcal{V}_{01}$  одинаков.

Вычислим поток поля  $\mathbf{D}$  через замкнутую изоповерхность  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  со значением  $\mathcal{F}$ , равным  $\mathcal{F}_s \in [\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1]$ :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} d\sigma_\alpha.$$

Воспользуемся тождествами:

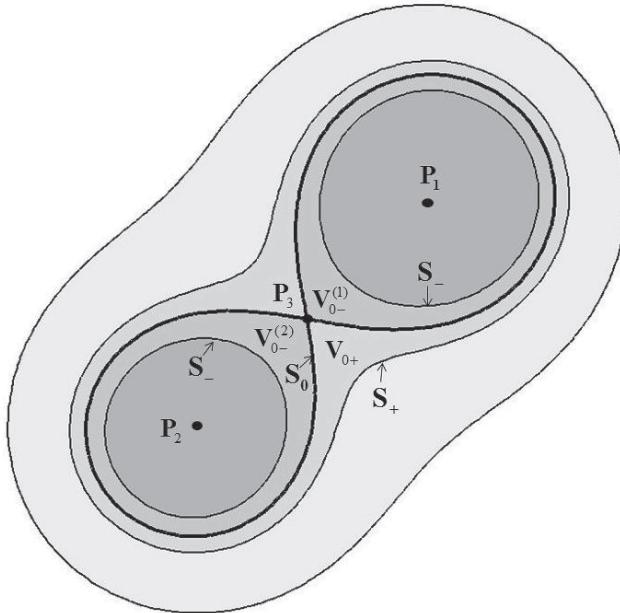
$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} = \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} d\sigma_\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} d\sigma_\alpha = s(\mathcal{V}) \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a d\sigma_a = s(\mathcal{V}).$$

Последний интеграл справа в этом соотношении берется по сфере радиуса  $R_s = \sqrt{2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0|}$ , в которую отображается изоповерхность  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  в соответствии с (1.4). Множитель  $s(\mathcal{V})$  - целочисленная величина, равная степени отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  области  $\mathcal{V}$  в шар радиуса  $R_s$ . Согласно общему определению степени отображения [16], стоящая в правой части величина есть не что иное, как индекс векторного поля  $e^a$ . Поскольку на изоповерхности величина  $|\mathbf{e}|^2 = 2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0| = \text{const}$  постоянная, то выражение для  $Q$  соответствует индексу единичного векторного поля  $\mathbf{e}/|\mathbf{e}|$  на изоповерхности  $S$ , что в свою очередь, равно эйлеровой характеристике  $\mathcal{V}_s$ , ограниченной изоповерхностью  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$ . В силу этого число  $Q$  равно половине эйлеровой характеристике поверхности  $S[\mathcal{F}_s]$  [16], а по построению является величиной заряда в ячейке, ограниченной изоповерхностью  $\mathcal{S}$ , т.е. внутри ячейки  $\mathcal{V}$ . В результате величина заряда  $Q$  равна с точностью до знака эйлеровой характеристике ячейки  $\mathcal{V}$ :

$$Q = \pm \chi(\mathcal{V}) = \pm \frac{1}{2} \chi(S[\mathcal{F}_s]). \quad (2.2)$$



**Рис. 3.** Пример двумерной структуры особой изоповерхности, ограничивающей две простые ячейки

Следовательно, доказана:

**Лемма 2.** Для каждой пустой топологической ячейки  $\mathcal{V}_{s0}$ , ограниченной замкнутыми изоповерхностями  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  и  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$  ( $\partial\mathcal{V}_{s0} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}$ ), поток векторного поля  $\mathbf{D}$  через любую изоповерхность, лежащую внутри  $\mathcal{V}_{s0}$  одинаков и равен целочисленной величине  $Q$ , определенной соотношением (2.2), т.е. эйлеровой характеристики области, ограниченной этой изоповерхностью.

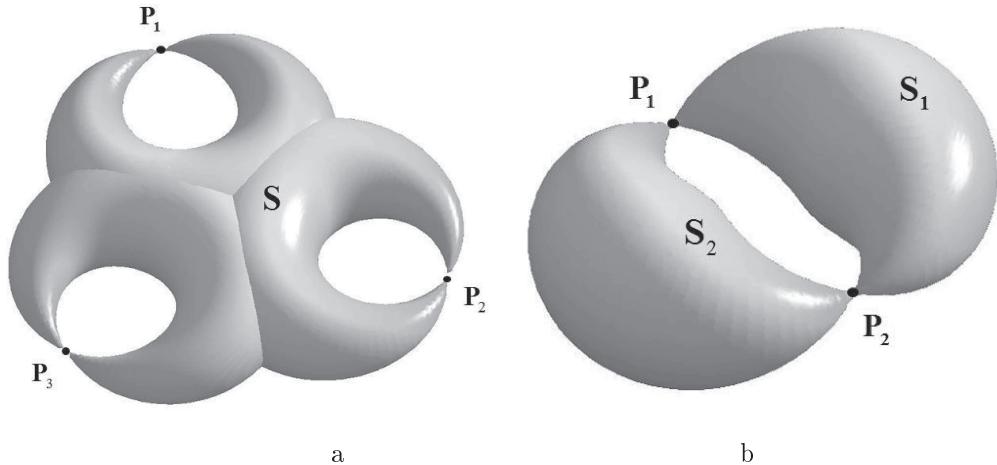
### 3. Особые изоповерхности

Пусть  $\mathcal{V}$  - предельная простая топологическая ячейка функции Морса  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , с границей  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$ , являющейся, по определению, особой изоповерхностью функции  $\mathcal{F}$  со значением  $\mathcal{F}_0$ , на которой лежит в общем случае  $K$  седловых точек с координатами  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Введем дополнительно две изоповерхности  $\mathcal{S}_+$  и  $\mathcal{S}_-$ , соответствующие значениям функции  $\mathcal{F}$ :  $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_0 + \delta\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_0 - \delta\mathcal{F}$ , где  $\delta\mathcal{F}$  - бесконечно малое вещественное число, такое, что выполнено условие:  $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_+$ , где  $\mathcal{V}_+$  и  $\mathcal{V}_-$  - области пространства, ограниченные изоповерхностями  $\mathcal{S}_+ = \partial\mathcal{V}_+$  и  $\mathcal{S}_- = \partial\mathcal{V}_-$ , соответственно.

В силу изолированности критических точек функции Морса ячейки  $\mathcal{V}_{0-}$  и  $\mathcal{V}_{0+}$  являются пустыми топологическими ячейками. Поэтому внутри каждой из этих топологических ячеек индексы изоповерхностей не изменяются при переходе от одного значения  $\mathcal{F} \in [\mathcal{F} \pm \delta\mathcal{F}]$  к другому. Обозначим значения индекса  $Q$  для изоповерхностей, лежащих внутри  $\mathcal{V}_{0+}$  через  $Q_+$ , для изоповерхностей вне  $\mathcal{V}_{0-}$  - через  $Q_-$ . Поскольку внутри пустых ячеек  $\mathcal{V}_{0+}$  и  $\mathcal{V}_{0-}$  значения индекса  $Q$  не меняются, то этот индекс меняется скачком от  $Q_-$  до  $Q_+$  при переходе через особую изоповерхность  $\mathcal{V}_0$ . Таким образом, особая изоповерхность обладает целочисленным зарядом, равным  $Q_0 = Q_+ - Q_-$ . Для иллюстрации на рис. (3) приведена двумерная структура топологических ячеек, ограниченных особой изоповерхностью с одной седловой точкой  $P_3$ . На рис. (3)  $V_{0-}^{(1)}$  и  $V_{0-}^{(2)}$  - две несвязных компоненты ячейки  $\mathcal{V}_{0-}$ , а  $P_1$  и  $P_2$  - точки экстремумов функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ .

Величина заряда на поверхности, согласно классической электродинамике, определяется величиной скачка нормальной компоненты поля напряженности при переходе через эту поверхность. Отсюда следует, что, если нормальная компонента поля  $\mathbf{D}$  на особой изоповерхности непрерывна, то поверхностная плотность заряда на ней равна нулю. В этом случае единственным источником заряда, расположенного на особой изоповерхности, являются седловые точки. Седловые точки  $\mathcal{F}$  в этом случае представляют собой точечные заряды величиной  $\pm 1$ , знак которых определяется индексом Пуанкаре-Хопфа, как и в случае с экстремумами. Если на особой изоповерхности расположено  $M$  седловых точек, с индексами Пуанкаре-Хопфа  $\varepsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , то имеет место соотношение:

$$Q_+ - Q_- = \pm \left( \chi(\mathcal{V}_+) - \chi(\mathcal{V}_-) \right) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k, \quad (3.1)$$



**Рис. 4.** Примеры предельных топологических ячеек с различным числом седловых точек каждой и разным числом компонент, *a* – предельная простая топологическая ячейка с тремя седловыми точками на границе, *b* – топологическая ячейка, состоящая из двух простых предельных ячеек с двумя седловыми точками на границе.

где сумма берется по всем седловым точкам особой изоповерхности. Примеры особых изоповерхностей приведены на рис. (4).

Из предыдущих построений следует:

**Лемма 3.** Величина заряда поля  $\mathbf{D}$  (1.7), сосредоточенная на любой особой изоповерхности функции Морса, является целочисленной величиной, значение которой вычисляется с помощью соотношения (3.1).

Целочисленность величины заряда, сосредоточенной на особой изоповерхности, еще не позволяет распространить уравнение (1.6) на всю совокупность критических точек  $\mathcal{F}$ , что является конечной точкой построений. Проблема состоит в том, что на особой изоповерхности заряд может быть распределен непрерывно. Это связано с тем, что на каждой простой ячейке и пустых топологических ячейках поле  $\mathbf{D}$  строится по отдельности с помощью введения отдельной координатной карты  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Для того, чтобы на особых изоповерхностях отсутствовали поверхностные заряды, необходимо согласовать выбор координат  $e^a(\mathbf{x}, t)$  на каждой ячейке с выбором аналогичных функций на других ячейках, граничащих с данной. Это возможно сделать, поскольку  $e^a(\mathbf{x}, t)$  определены с помощью соотношений (1.2), допускающих произвол, например, в виде произвольного выбора функций  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  и  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  в (1.9).

Согласно классической электродинамике, характер распределения заряда определяется величиной скачка нормальной составляющей поля  $\mathbf{D}$  на особой изоповерхности. Следовательно, для того, чтобы непрерывно распределенный поверхностный заряд на особой изоповерхности отсутствовал, т.е. был точечным и сосредоточен в седловых точках, необходимо и достаточно непрерывности нормальной составляющей поля  $\mathbf{D}$  при переходе через особую изоповерхность.

Используя (1.2), компоненты поля  $\mathbf{D}$  можно записать в виде:

$$\mathbf{D}^\alpha = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F}, \quad (3.2)$$

где:

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{de^a} \frac{dx^\beta}{de^a}. \quad (3.3)$$

Нормальная составляющая поля  $\mathbf{D}$  на любой изоповерхности  $S_i = \partial V_i$ , в том числе, особой имеет вид:

$$\mathbf{D}_n = \frac{(\mathbf{D}, \nabla \mathcal{F})}{|\nabla \mathcal{F}|} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3 |\nabla \mathcal{F}|} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}| |\nabla \mathcal{F}|}. \quad (3.4)$$

Здесь использовано тождество:

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = |\mathbf{e}|^2,$$

следующее из соотношения (1.2).

Пусть особая изоповерхность  $S_{12}$  является границей двух соприкасающихся по ней топологических ячеек  $V_1$  и  $V_2$ , т.е.  $S_{12} \subset \partial V_1 \cup \partial V_2$ . Обозначим через  $D_n^{(1)}$  и  $D_n^{(2)}$  значения нормальной составляющей  $D_n$  в точках на особой изоповерхности, полученные предельными переходами внутри областей  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно:

$$D_n^{(1)} = \lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n, \quad D_n^{(2)} = \lim_{P(\in V_2) \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n,$$

где пределы слева и справа берутся по последовательности точек  $P$ , лежащих внутри простых ячеек  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно. Условие отсутствия поверхностных зарядов эквивалентно условию непрерывности  $D_n$ :

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}.$$

Поскольку сама функция  $\mathcal{F}$  является гладкой, то функция  $|\nabla \mathcal{F}|$  непрерывная всюду на  $P^3$ . Следовательно, условие непрерывности  $D_n$  в каждой точке  $P_S \in S_{12}$  эквивалентно равенству:

$$\lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_1|}} \Big|_P = \lim_{P(\in V_2) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_2|}} \Big|_P, \quad (3.5)$$

где  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  - значения функции  $\mathcal{F}$  в экстремумах этих ячеек. Знак минус появляется в этом соотношении в силу того, что при пересечении особой изоповерхности всегда знак нормали меняется на обратный. Отсюда следует, что на особых изоповерхностях якобиан  $J$  должен испытывать скачок в соответствии с равенством:

$$\frac{|J_1|}{|J_2|} = \frac{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_1|}}{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_2|}}, \quad (3.6)$$

где  $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}(\mathbf{x}_S, t)$  - значение функции  $\mathcal{F}$  на рассматриваемой особой изоповерхности:  $\mathbf{x}_S \in S_i$ ,  $J_1 = \lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} J$ ,  $J_2 = \lim_{P(\in V_3) \rightarrow P_S \in S_i} J$ . Этот факт крайне важен с точки зрения того, что  $|J|$  фактически представляет собой модуль квадрата волновой функции, как это было показано в [1]. Этот факт будет рассмотрен далее в данной статье.

При выполнении условий (3.5) и (3.6) на всех особых изоповерхностях  $\mathcal{F}$  заряд может быть сосредоточен только в седловых точках, в которых условие непрерывности может не выполняться. В силу этого источниками поля  $\mathbf{D}$  будут исключительно критические точки  $\mathcal{F}$ .

Опираясь на эти рассуждения, устанавливаем:

**Утверждение 1.** Пусть поле  $\mathbf{D}$  построено на всех простых и пустых топологических ячейках функции  $\mathcal{F}$  с помощью соотношений (1.2) и (1.7) и введения на каждой из ячеек функций  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Тогда при условии выполнения соотношений (3.5) и (3.6) на всех особых изоповерхностях, поле  $\mathbf{D}$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} D^\alpha = \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (3.7)$$

где, кроме экстремумов, точечный заряд располагается в каждой седловой точке с соответствующим зарядом  $\varepsilon_k$ , определенным как и раньше в соответствии с формулой (1.3).

Правая часть уравнения (3.7) представляет собой плотность точечных зарядов. Каждая седловая точка будет давать  $\delta$ -образный вклад в плотность заряда, равный  $\pm 1$ . Поскольку уравнение (3.7) при выполнении граничных условий (3.5) и (3.6) описывает поле  $\mathbf{D}$  на всей гиперплоскости  $P^3$ , его можно рассматривать как первое уравнение Максвелла для индукции  $\mathbf{D}$  фундаментального электрического поля.

#### 4. Уравнения электродинамики с целочисленным зарядом

Как показано в [1], соотношений, рассмотренных в предыдущем разделе, достаточно для того, чтобы построить систему полей и уравнений, описывающих их динамику, которая почти полностью совпадает с аналогичной системой полей и уравнений электродинамики Максвелла с тем отличием, что заряды в новой теории являются всегда точечными и целочисленными. Поскольку в последующих построениях придется ссылаться на вид этой совокупности полей и уравнений, то мы приведем их перечень без детального вывода, который излагался в работе [1].

Построение системы начинается с вычисления поля  $\mathbf{D}$ , как решения уравнения (3.7). Общее решение уравнения (3.7) для компонент поля  $\mathbf{D}$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{D}^\alpha = J \frac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F}}{|\mathbf{e}|^3} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\mathbf{r}_i^\alpha}{|\mathbf{r}_i|^3} + [\text{roth}]^\alpha, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{h}$  - некоторое гладкое векторное поле,  $\varepsilon_i = (-1)^{m_i}$ ,  $m_i$  - число отрицательных собственных значений матрицы  $\nabla_\alpha \nabla_\beta \mathcal{F}$  в точке с координатами  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ , а  $\mathbf{x}_i$  - радиус-вектор положения  $i$ -той критической точки фундаментального потенциала. Если поле  $\text{roth}$  представить производной по времени от векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\text{roth} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

то имеем соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{E}_c + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Здесь  $c$  - некоторая постоянная, имеющая смысл скорости света в классической электродинамике. Поле  $\mathbf{E}_c$  потенциально:

$$\mathbf{E}_c = -\nabla \Phi_c,$$

где

$$\Phi_c = - \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{|\mathbf{r}_i|}, \quad (4.3)$$

представляет собой классический потенциал системы точечных зарядов.

Результат дифференцирования (4.1) по времени можно интерпретировать как еще одно уравнение Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -4\pi \mathbf{j} + c \text{rot} \mathbf{H}, \quad (4.4)$$

если принять в качестве плотности тока  $\mathbf{j}$  поле:

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_c, \quad (4.5)$$

а в качестве напряженности магнитного поля величину

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Взяв ротор от правой и левой частей (4.1), приходим к следующему уравнению:

$$\text{rot} \mathbf{D} = \text{rot} \mathbf{E} = \text{rot} \text{roth} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot} \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Введем индукцию магнитного поля по формуле  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ . Это автоматически дает третье уравнение Максвелла:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

Последнее - четвертое уравнение Максвелла получается из (4.7) соответствующей подстановкой:

$$\text{rot} \mathbf{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

При этом напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  и индукции  $\mathbf{B}$  связаны общим уравнением:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{H}, \quad (4.10)$$

которое играет роль материального уравнения. Это уравнение на самом деле является тождеством, порожденным наличием в теории поля  $\mathbf{h}$ . Последним уравнением, входящим в совокупность рассматриваемой системы уравнений, является закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (4.11)$$

где плотности тока  $\mathbf{j}$  и заряда  $\rho$  определены выше.

Проверка тождества осуществляется прямой подстановкой в это уравнение соотношений (4.2) и (4.6) вместе с определением  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ . В силу этого уравнение не накладывает никаких ограничений на вид поля  $\mathbf{h}$  и выражает лишь общий тип связи между введенными в теорию полями для сопоставления их классической электродинамике. Поэтому это соотношение не противоречит в данной теории материальному уравнению классической электродинамики  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума. Можно убедиться, что это материальное уравнение в данной теории эквивалентно уравнению для поля  $\mathbf{h}$  следующего вида:

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{h} = \frac{\mu_0}{c^2} \mathbf{h}_{tt}. \quad (4.12)$$

Это есть по сути волновое уравнение классической электродинамики с постоянной скоростью света в вакууме равной  $c$ , если  $\mu_0 = 1$ .

**Определение 2.** Совокупность полей  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  будем называть фундаментальными полями, а совокупность уравнений, описывающих их динамику, в дальнейшем будем называть фундаментальной электродинамикой.

Термин фундаментальная электродинамика связан, во-первых, с тем, что по своему построению это поле связано с геометрией пространства, а, во-вторых, как это было показано в [1], в уравнения Ньютона и Шредингера для частиц входит совокупность нескольких иных полей, которые и следует рассматривать как классические электромагнитные поля. При этом поля фундаментальной электродинамики оказываются связанными и с другими типами взаимодействия, такими как слабое или сильное [1]. Геометрический смысл полей фундаментальной электродинамики связан с интерпретацией функции  $\mathcal{F}$  как функции высоты физической гиперповерхности в объемлющем пространстве размерности 4. Эта интерпретация, как кажется, носит формальный характер и не имеет фундаментального смысла. Однако ситуация меняется, если в рассмотрение включить многосвязные физические гиперповерхности. Такая необходимость возникает, когда в теорию включается не только электрический заряд, но и барионный. Как показано в [1] в рамках данной теории барионный заряд интерпретируется как топологический инвариант - число ручек Уилера, вклеенных в физическую гиперповерхность  $V^3$ . Это приводит к многосвязности  $V^3$  и к тому, что функция  $\mathcal{F}$  является многозначной в декартовых координатах на  $P^3$ . Многозначность  $\mathcal{F}$  может быть согласована с принципом однозначности измерений в точке пространства только в том случае, если  $\mathcal{F}$  - функция высоты  $V^3$ . В этом случае отдельные листы  $\mathcal{F}$  соответствуют реально существующим листам гиперповерхности  $V^3$ .

В данной работе мы не будем специально рассматривать случай многозначности  $\mathcal{F}$ , сославшись на [1]. Такой анализ требует отдельного, достаточно сложного анализа, который лучше проводить в отдельной работе. Отметим лишь, что все основные соотношения, полученные выше, не зависят от того, является ли функция Морса  $\mathcal{F}$  однозначной или многозначной. Необходимо лишь в будущем дополнить эти построения условиями склейки листов в проекции на гиперплоскость  $P^3$ .

## 5. Принципы описания взаимодействия поля с частицами

Как следует из предыдущего, геометрическое описание электромагнитного поля строится на свойствах всего одной скалярной функции  $\mathcal{F}$  - функции высоты. Это означает, что для описания всех явлений, которые воспринимаются нами как движение материи, достаточно было бы установить уравнение, которое описывает изменения этой функции в пространстве и времени, и, затем, решая его, предсказывать и объяснять наблюдаемые явления движения частиц и полей. Однако для того, чтобы объяснить наблюдаемые явления, необходимо указать способ связать характеристики геометрии, которая описывается с помощью функции  $\mathcal{F}$ , с естественными для эксперимента характеристиками движения материи. В частности, поля  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  необходимы в теории лишь для того, чтобы связать геометрическое описание с естественными для эксперимента характеристиками электромагнитного поля, описывающего взаимодействия частиц. Полезность такого подхода пока состоит только в том, что поля  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  удовлетворяют системе уравнений, которая почти в точности соответствует теории Максвелла с точечными зарядами, имеющими теперь вполне ясное геометрическое и топологическое происхождение. Однако для того, чтобы такой подход мог претендовать на теорию, описывающую структуру и динамику материи, необходимо, связать введенные характеристики фундаментального электромагнитного поля с силами, действующими на частицы, которые появляются в данном подходе как совокупности точечных зарядов - экстремумов и седловых точек функции  $\mathcal{F}$ . Фактически необходимо показать, что движение совокупностей точечных зарядов описывается уравнениями Ньютона и Шредингера, содержащими поля  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  или их некоторые аналоги.

При реализации такой программы следует подчеркнуть, что динамика частиц описывается и уравнениями Ньютона, и уравнениями Шредингера, поскольку оба типа описания обязательно присутствуют в современном способе описания динамики материи. Квантовая теория опирается на классические представления при вычислении полной энергии системы и лишь затем, используя статистический постулат, переходят к квантовым уравнениям. Следовательно, необходимо построить детерминированную теорию частиц, а затем «испортить» её статистическим постулатом, введение которого определяется исключительно наличием дуализма волна-частица при описании динамики материальных объектов на микроуровне. Однако, если внимательно посмотреть на суть предлагаемой концепции описания заряженных частиц [1], то можно усмотреть в ней наличие простого объяснения дуализма волна-частица. Действительно, частица в данном подходе определяется не как точка, а как область пространства с экстремумом или экстремумами фундаментального потенциала  $\mathcal{F}$ , но при этом заряд таких объектов точечный. Перемещение областей с экстремумами можно рассматривать как волну, а сами экстремумы - как точечные объекты внутри таких областей, положение которых нельзя точно определить, не изменения структуру областей-частиц.

Исходя из этого, можно предположить, что данный подход изначально должен содержать описание, которое можно сопоставить и квантовой теории, и классической механике без введения «руками» статистического постулата. Это означает, что в данной теории необходимо ввести некоторый формализм, эквивалентный статистическим расчётам квантовой механики, но имеющий другой смысл. Такой формализм был в общем построен в [1]. Смысль такого формализма можно угадать из самого статистического постулата Борна, согласно которому квадрат модуля волновой функции есть вероятность обнаружить частицу в некоторой точке пространства в заданный момент времени. При этом классические переменные - координаты, импульсы и т.д. являются средними значениями по пространству соответствующих локальных переменных точечных частиц. Это означает, что квантовое усреднение может рассматриваться не как процедура построения среднего по статистическому ансамблю, а как процедура усреднения по плотности, аналогичной плотности масс или заряда, что широко используется в самой квантовой теории. Если принять такую точку зрения в развиваемой здесь концепции, то можно дать приемлемую интерпретацию сходства пространственного усреднения и статистического среднего положения некоторой точечной частицы в квантовой механике [1].

## 6. Геометрические маркеры и уравнения движения частиц

Для введения пространственного усреднения, аналогичного квантовой теории, введем «функцию плотности» материи, исходя из введенных выше параметров геометрического описания. Важную роль в концепции играют поля  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Смысль введения полей  $e^a(\mathbf{x}, t)$  не исчерпывается только их использованием в построении электродинамики с целочисленными зарядами и классификации частиц. Эти поля позволяют ввести инвариантную плотность, которая используется для построения геометрического усреднения. Основой для этого служит формальное соотношение:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

Это уравнение описывает перенос криволинейных координат  $e^a$  относительно декартовой системы координат (системы отсчёта)  $\mathbf{x}$  фонового пространства с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ . В частности, из (6.1) следует:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = 0, \quad (6.2)$$

что означает, что точки изоповерхности функции  $\mathcal{F}$  переносятся с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ .

Уравнение (6.1) во всех точках, где преобразование координат  $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$  не вырождено, позволяет однозначно вычислить поле  $\mathbf{V}$  через функции  $e^a(\mathbf{x}, t)$ :

$$V^\alpha = - \frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t}.$$

Таким образом,  $e^a(\mathbf{x}, t)$  можно рассматривать как гидродинамические маркеры, переносимые потоком с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ . Поэтому в дальнейшем мы будем называть функции  $e^a(\mathbf{x}, t)$  геометрическими маркерами, учитывая то, что в рассматриваемом подходе они связаны с геометрией физического пространства соотношениями (1.2).

Уравнение (6.1) после несложных преобразований [1] приводит к уравнению для якобиана  $J = \det\{\partial e/\partial x\}$  отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ . Дифференцируя (6.1) по координатам  $\mathbf{x}$ , а затем сворачивая результат с матрицей  $\partial x^\alpha/\partial e^a$  по обоим индексам, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Поскольку матрицы с компонентами  $J_a^\alpha = \partial x^\alpha/\partial e^a$  и  $J_\alpha^a = \partial e^a/\partial x^\alpha$  взаимно обратны, то имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial t}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = V^\beta \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\beta.$$

Отсюда следует уравнение для якобиана  $J$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} |J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (V^\beta |J|) = 0, \quad (6.3)$$

описывающее его изменения со временем и имеющее вид дифференциального закона сохранения плотности  $J$ .

Поскольку для  $|J|$  выполняется закон сохранения, то это позволяет на каждой топологической ячейке ввести инвариантное геометрическое усреднение:

$$\bar{Q} = \int_{\mathcal{V}_0} Q(\mathbf{x}, t) \tilde{J} d\mathcal{V}, \quad (6.4)$$

с сохраняющейся нормировкой:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} |J| d\mathcal{V} = \text{const},$$

где интеграл берется по объему топологической ячейки  $\mathcal{V}_0$ . При этом удобно ввести нормированную плотность:

$$\tilde{J} = \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} |J|, \quad \int_{\mathcal{V}_0} \tilde{J} d\mathcal{V} = 1. \quad (6.5)$$

Введение геометрического усреднения даёт возможность перейти по аналогии с квантовой механикой от описания распределённых объектов - топологических ячеек  $\mathcal{V}_i$ , к сосредоточенным параметрам - их средним координатам, скоростям и ускорениям:

$$\begin{aligned} X^\alpha &= \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} x^\alpha \tilde{J} d\mathcal{V}, & U^\alpha &= \frac{dX^\alpha}{dt} = \int_{\mathcal{V}_i} V^\alpha \tilde{J} d\mathcal{V}, \\ \frac{dU^\alpha}{dt} &= \frac{d^2 X^\alpha}{dt^2} = \int_{\mathcal{V}_i} \left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \tilde{J} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_i} \frac{dV^\alpha}{dt} \tilde{J} d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

При выводе этих соотношений использовалось то, что интегралы берутся по топологическим ячейкам, границами которых являются изоповерхности функции  $\mathcal{F}$ , а так же уравнения (6.3) и (6.2), т.е. то, что граница топологической ячейки переносится потоком  $\mathbf{V}$  (см. [1]).

## 7. Уравнения Ньютона

Появление в теории инвариантной процедуры усреднения с плотностью, подчиняющейся дифференциальному закону сохранения (6.3), позволяет интерпретировать поле  $\mathbf{V}$  как характеристику микромасштабного электромагнитного поля, фигурирующего в квантовой теории. Как было показано в [1], поле  $\mathbf{V}$  можно интерпретировать как линейную комбинацию векторного потенциала  $\mathbf{A}$  электромагнитного поля с градиентом некоторого скалярного поля  $\chi$ , который отождествляется с функцией действия частицы:

$$\mathbf{V} = -\gamma_0 \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (7.1)$$

Здесь  $\gamma_0 = e/m_e c$ , где  $e$  - заряд электрона,  $m_e$  - его масса, а  $c$  - скорость света. Множитель  $\gamma_0$  введен для прямого сопоставления появляющихся далее в теории уравнений уравнениям Ньютона

и Шредингера. Данное представление для поля переноса геометрических маркеров  $\mathbf{V}$  является неоднозначным и определяется выбором функции  $\chi$ . Далее мы покажем, что этому выбору можно придать ясный физический смысл.

Последнее из соотношений (6.6) по своему смыслу представляет собой уравнение Ньютона для усреднённых координат частиц, что собственно является содержанием теоремы Зоммерфельда о средних. Необходимо лишь показать, что в правой части этого уравнения содержатся силы, которые можно интерпретировать как классические силы Кулона и Лоренца и, по возможности, тяготения. Для этого воспользуемся тождеством:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} + \gamma_0 c \Phi \right) - \gamma_0 [\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A}]^\alpha - \gamma_0 c \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \right). \quad (7.2)$$

Функция  $\Phi$  введена пока формально, что позволяет теперь идентифицировать элементы этого представления, как параметры некоторого микромасштабного электромагнитного поля следующим образом:

$$E^\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad B^\alpha = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  отличаются от полей  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  фундаментальной электродинамики. Установление связи между этими полями является важной задачей, которую придется решать в дальнейшем. С помощью процедуры усреднения мы можем теперь ввести усреднённое (макроскопическое) электромагнитное поле с параметрами

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{A} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{B}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{B} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{E}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{E} \tilde{J} dV.$$

Это позволяет «микроскопические» поля  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  представить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'.$$

Здесь  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{E}'$  - флуктуации, т.е. поля с нулевым средним.

**Определение 3.** Поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  будем в дальнейшем называть локальными или микроскопическими динамическими электромагнитными полями, а поля  $\bar{\mathbf{E}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  и  $\bar{\mathbf{A}}$  - макроскопическими или усреднёнными динамическими полями.

В результате перехода к усреднённым полям формула для среднего ускорения примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}} = \gamma_0 \bar{\mathbf{E}} - \gamma_0 [\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}}] - \nabla_X \bar{U} + \mathbf{F}_q. \quad (7.3)$$

Это соотношение выглядит как уравнение Ньютона заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле  $\{\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{E}}\}$  и дополнительном консервативном поле с потенциалом  $\bar{U}$ :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{|\mathbf{k}|=0} \frac{1}{|\mathbf{k}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} U(\mathbf{X}, t)}{\partial X_1^{k_1} \partial X_2^{k_2} \partial X_3^{k_3}} M_{\mathbf{k}}(t).$$

где

$$U(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 - \chi_t - \gamma_0 c \Phi, \quad (7.4)$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  - мультииндекс,  $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$ ,  $|\mathbf{k}|! = k_1! k_2! k_3!$ ,

$$M_{\mathbf{k}} = M_{k_1 k_2 k_3}(t) = \int_{\mathcal{V}_i} (x^1 - X^1)^{k_1} (x^2 - X^2)^{k_2} (x^3 - X^3)^{k_3} \tilde{J} dV$$

Дополнительная сила  $\mathbf{F}_q$ , имеющая вид:

$$F_q^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} \gamma_0 [\mathbf{V}' \times \mathbf{B}']^\alpha \tilde{J} dV,$$

может рассматриваться как флуктуационная добавка, аналогичная добавкам, возникающим в квантовой теории при выводе усреднённых уравнений Ньютона из операторных уравнений. Подробный вывод всех этих соотношений можно найти в [1].

**Утверждение 2.** Средняя координата топологической ячейки, удовлетворяет уравнению Ньютона (7.3), имеющему вид уравнения движения точечной частицы в электромагнитном поле, которое описывается усреднёнными динамическими полями  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ ,  $\bar{U}$ .

## 8. Остаточный потенциал

Заметим, что соотношение (7.4) представляет собой способ придать физический смысл функции  $\chi$  в представлении (7.1). При заданном потенциале  $U(\mathbf{x}, t)$  соотношение (7.4) можно рассматривать как уравнения Якоби:

$$\chi_t + \frac{1}{2} \left( |\nabla \chi|^2 + 2\gamma_0(\mathbf{A}, \nabla \chi) + \gamma_0^2 |\mathbf{A}|^2 \right) + \gamma_0 c \Phi + U = 0. \quad (8.1)$$

для функции  $\chi$ , которая представляет собой в этом случае функцию действия для частицы в электромагнитном поле с потенциалами  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  и в скалярном поле с потенциалом  $U$ . При такой интерпретации для замкнутого описания динамики частиц необходимо иметь способ определения потенциала  $U$ , исходя из некоторых физических соображений, которые не содержатся пока в представленном формализме. Чисто классическая форма уравнения Якоби даёт возможность интерпретировать  $U$  как потенциальную энергию поля тяготения, поскольку среди полей классической физики это единственное подходящее объяснение. Однако, для того, чтобы получить подходящее описание для потенциала  $U$ , необходимы дополнительные исследования.

В связи с проблемой выбора потенциала  $U$  отметим важное обстоятельство, связанное с калибровочными преобразованиями электромагнитных потенциалов. В классической электродинамике калибровочное преобразование потенциалов:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{1}{\gamma_0} \nabla \phi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c\gamma_0} \phi_t$$

оставляет неизменным поля напряжённостей и сами уравнения Максвелла. При таком преобразовании функция действия  $\chi$  должна трансформироваться по правилу:

$$\chi' = \chi + \phi.$$

При этом векторное поле переноса  $\mathbf{V}$  и остаточный потенциал  $U$  не изменятся. С другой стороны, поскольку потенциалы  $U$  и  $\Phi$  входят одинаково в уравнение (8.1), то вместо преобразования  $\Phi$  в этом уравнении можно было бы подвергнуть калибровочному преобразованию потенциал  $U$ :  $U' = U - \phi_t$ . В этом случае уравнение Якоби останется неизменным вместе со скоростью переноса  $\mathbf{V}$ , но будет изменено поле напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$ . Следовательно, калибровочные преобразования потенциала  $U$  меняют картину электрических полей неинвариантным образом.

Из этих соображений следует, что выбор потенциала  $U$  не может зависеть от выбора электромагнитных полей. Фактически, каждому конкретному выбору функции  $U(\mathbf{x}, t)$  будет соответствовать определённая картина динамики частиц. Каждая из этих картин эквивалентна любой другой в смысле, что геометрическая информация, связанная с полем переноса  $\mathbf{V}$ , не меняется при любом выборе  $U$ . Этот вопрос требует более детального исследования, поскольку, в реальности, инвариантным должен оставаться фундаментальный потенциал  $\mathcal{F}$ , который и определяет геометрию физического пространства. Но среди преобразований, оставляющих этот потенциал неизменным, имеются преобразования, изменяющие поле переноса  $\mathbf{V}$ . Гравитационный характер функции  $U$  мы рассмотрим во второй части данной работы.

## 9. Квантовые уравнения

Вместе с усреднённым уравнением Ньютона в рамках такого подхода, как это подробно описано в [1], естественным образом появляется и уравнение Шредингера для волновых функций:

$$\Psi = \sqrt{|\tilde{J}|} e^{i\chi/\hbar}. \quad (9.1)$$

Используя (8.1), с учетом (7.1), простыми вычислениями показывается, что функция (9.1), удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( -i\hbar \nabla - \gamma_0 \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \left( \gamma_0 \Phi - U_G \right) \Psi, \quad (9.2)$$

где  $\Phi$  - потенциал электрического поля и

$$U_G = U - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta|J|}{|J|}. \quad (9.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что  $|\tilde{J}|$  выполняет роль плотности вероятностного распределения квантовой механики, а соотношение:

$$|\tilde{J}| = |\Psi|^2, \quad (9.4)$$

имеющее здесь чисто геометрический смысл, выполняет роль статистического постулата Борна, заменяя усреднение по ансамблю геометрическим усреднением.

Как и  $U$  остаточный потенциал  $U_G$  представляет собой потенциальную энергию некоторого «остаточного» поля по отношению к электромагнитному полю. Поэтому этот остаточный потенциал так же должен быть связанным с потенциалом гравитационного поля.

**Утверждение 3.** Функция (9.1), представляющая собой аналог волновой функции частицы, но имеющая геометрический смысл, удовлетворяет уравнению Шредингера (9.2) частицы, движущейся в электромагнитном поле, которое описывается динамическими локальными полями  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ .

## 10. Уравнения для динамических полей

Как видно из предыдущих построений, данная теория содержит в себе естественным образом уравнения классической и квантовой теорий, причём в той взаимосвязи, как это принято в квантовой теории. Частицы в таком подходе, представляющие собой топологические ячейки, имеют как свойства волны, поскольку являются нелокальными объектами, так и свойства частиц, поскольку основным их структурным элементом являются критические точки функции  $\mathcal{F}$ . Отличием от квантовой теории является лишь то, что геометрическое усреднение распространяется на топологические ячейки, а не на все пространство. Однако это обстоятельство вполне согласуется с представлениями самой квантовой механики. Действительно, геометрическому усреднению можно придать смысл усреднения по ансамблю всех возможных положений критических точек внутри топологической ячейки. Проиллюстрировать это можно так. В простейшем случае, когда ячейка является простой, в ней содержится строго один экстремум. В силу этого формально нормированную плотность  $|J(\mathbf{x}, t)|/\mathcal{V}_0$  можно рассматривать как вероятность обнаружить этот экстремум внутри ячейки. Такая интерпретация вполне согласуется с геометрическим усреднением. С точки зрения данной концепции такая интерпретация является бесполезной, но привычной с точки зрения квантовой теории. В этом случае вероятность обнаружить экстремум вне топологической ячейки строго равна нулю, поскольку это связано с самим определением простой ячейки. Исчезновение экстремума неизбежно влечёт за собой топологическую перестройку ячейки, что связано уже не со «случайным» поведением экстремума, а с динамикой системы.

Единственным неясным элементом данной теории является то, что в представленном способе описания динамики частиц фигурируют не поля фундаментальной электродинамики  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$ , а некоторые другие поля  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{A}$ , которые появляются при формулировании усреднённой динамики частиц. Связь между фундаментальными полями и динамическими полями существует, поскольку поле переноса  $\mathbf{V}$  напрямую связано с координатным преобразованием  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ , которое определяет поля фундаментальной электродинамики. Для того, чтобы проследить эту связь, необходимо найти уравнения для динамических полей.

Заметим, что потенциал  $\Phi$  появляется в уравнениях динамики в форме произвольной калибровки. С другой стороны, в уравнениях фундаментальной электродинамики аналогичный потенциал возникает из основополагающих представлений о функции  $\mathcal{F}$  и является кулоновским потенциалом системы точечных зарядов, совпадающих с экстремумами фундаментального потенциала  $\mathcal{F}$ . В силу этого потенциал  $\Phi$  следует выбирать в форме потенциала  $\Phi_c$  (4.3) с точностью до калибровки, т.е. с точностью до любого слагаемого в виде всюду гладкой функции  $\phi$ , т.е.  $\Phi = -\Phi_c + \phi$ . Это обеспечит точное совпадение источников фундаментальных и динамических полей. В этом случае из самого определения  $\mathbf{E}$  следует уравнение:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \Delta\Phi_c + \Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Для того, чтобы источник поля совпадал с зарядами фундаментальной электроники, необходимо лишь потребовать, чтобы всегда выполнялось соотношение:

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A},$$

что и является условием калибровочного преобразования. При этом поле  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\phi$  имеет нулевую дивергенцию:  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ , т.е.  $\mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  некоторое гладкое векторное поле. В результате имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{k=1}^N \varepsilon_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

Два уравнения Максвелла для динамических полей выполняются автоматически из самого определения полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ . Последнее уравнение электромагнитной индукции так же получается из определения  $\mathbf{E}$  при условии выполнения обобщённого материального уравнения:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

которое в данном случае можно рассматривать как уравнение для поля напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Это уравнение фактически в точности совпадает с уравнением (4.10) после применения к нему операции  $\operatorname{rot}$ . Это указывает на то, что динамические и фундаментальные поля внешне очень похожи, но на самом деле существенно отличаются.

Поскольку экспериментальные факты объясняются с точки зрения динамических полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$ , то возникает вопрос о необходимости вообще вводить поля фундаментальной электродинамики, за исключением, возможно, только фундаментального потенциала  $\mathcal{F}$  и связанного с ним напрямую поля  $\mathbf{D}$ . Эти поля определяют положение точечных зарядов - источников электромагнитного поля. Ответ на этот вопрос состоит в том, какую роль играют поля фундаментальной электродинамики с точки зрения решения проблемы конечности энергии системы точечных зарядов и величины массы частиц, представляющих собой в рамках данной концепции топологические ячейки. Как было указано в [1], принципиальным фактом в данной концепции является то, что точечные заряды связаны с гладкими структурами геометрии. Это само по себе должно предопределять конечность энергии таких структур, которые в теории динамических полей выглядят кулоновскими сингулярностями с бесконечной энергией. Следовательно, фундаментальные поля можно рассматривать как образ, к которому стремится квантовая теория поля в рамках теории перенормировок, с помощью которого и вычисляются наблюдаемые величины параметров квантowych объектов. Чтобы показать это, необходимо рассмотреть вопросы о сохраняющихся величинах в рамках данной теории.

## 11. Интегралы движения динамики полей и частиц

Для того, чтобы завершить общие построения теории и перейти к анализу физических следствий из неё, полезно рассмотреть вопрос об интегралах движения построенных уравнений. В силу того, что в данной теории усреднённые уравнения Ньютона и уравнения Шредингера являются разной формой одного и того же подхода, т.е. определяются скоростью переноса  $\mathbf{V}$  и фундаментальным потенциалом  $\mathcal{F}$ , интегралы движения усреднённых уравнений будут являться интегралами движения и уравнений фундаментальных полей. Как было показано в [1], интегралами движения усреднённой системы уравнений являются все интегралы вида:

$$I = \int_{V_i} L(\mathbf{x}, t) \tilde{J} dV, \quad (11.1)$$

где интеграл берется по топологической ячейке, а функция  $L(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (11.2)$$

**Утверждение 4.** Любая функция только геометрических маркеров является интегралом движения уравнений динамических полей как макроскопических (усреднённых), так и микроскопических (локальных).

Доказательство строится прямым дифференцированием (11.1) с учётом уравнения (6.3) для Якобиана:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_i} L(\mathbf{x}, t) |J| dV = \int_{\mathcal{V}_i} \left( \frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right) \tilde{J} dV = 0. \quad (11.3)$$

В силу (6.1) все такие функции должны иметь следующий вид:

$$L(\mathbf{x}, t) = L(e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t)),$$

т.е. являются функциями только координат  $\mathbf{e}$ . В частности, такими функциями являются  $\mathcal{F}$ , а также  $\chi$ .

Одним из интегралов движения является величина:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV,$$

равная нормировочному коэффициенту  $\mathcal{V}_0$  из (6.5). Собственно это и обеспечивает сохранение нормировки волновых функций  $\Psi$  из (9.1) и (9.4). Важным является то обстоятельство, что величина:

$$\mathcal{M} = m_0 \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV = m_0 \mathcal{V}_0,$$

входит в усреднённые уравнения Ньютона единственным универсальным множителем, аналогичным массе частицы как топологической ячейки. Отсюда следует вывод, что эта величина в данной теории представляет, с точностью до некоторого размерного множителя  $m_0$ , «массу» топологической ячейки. При этом величину:

$$\rho_m = m_0 |J|$$

следует рассматривать, как плотность массы материи. Масса топологической ячейки  $\mathcal{M}$  взята в кавычки по той причине, что реальная масса частицы, как это обсуждается далее, будет вычисляться, как множитель в уравнении относительного движения внутренней топологической ячейки по отношению к внешней. Поэтому реальные значения масс частиц будут некоторыми комбинациями масс топологических ячеек. Этот важный факт позволяет уже более детально сопоставлять полученные уравнения Ньютона уравнениям классической и квантовой механики.

Однако, тот факт, что интегралом движения являются все возможные функции вида  $I(\mathbf{e})$ , указывает на то, что масса частиц, плотность материи и сама плотность пространственного усреднения  $|J|$  могут в реальности иметь более общий вид. В частности, все соотношения, касающиеся вывода уравнений Ньютона и квантовых уравнений, остаются неизменными, если в этих уравнениях  $|J|$  заменить на функцию:

$$\mathcal{J} = I(\mathbf{e}) |J|. \quad (11.4)$$

Вместе с тем, выбор той или иной функции  $I(\mathbf{e})$  определяет распределение плотности массы в пространстве, а так же конечные значения масс частиц. Эти величины теперь будут определяться соотношениями:

$$M = m_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathcal{J} dV \quad (11.5)$$

и

$$\rho_m = m_0 \mathcal{J} \quad (11.6)$$

на каждой топологической ячейке. Эти величины по смыслу построения обладают важными свойствами, которые связаны с их сохранением.

**Утверждение 5.** Любая функция  $\rho_m$ , определённая соотношением (11.6), удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (11.7)$$

а величина  $M$  (11.5) сохраняется при движении топологической ячейки:

$$\frac{dM}{dt} = 0.$$

Произвол в выборе  $I(\mathbf{e})$  означает, что выбор функции  $I(\mathbf{e})$  не может быть сделан исключительно из математических соображений и должен определяться некоторыми экспериментальными фактами или физическими принципами. Такие факты и соображения будут сформулированы в следующей части данной работы.

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015)

### Список литературы

1. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология // Гравитация и электромагнетизм: тр. межд. конф. Минск. БГУ, 1998. С. 42–50.
2. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология // Изв. вузов. Физика, 2000. №2. С. 134–140.
3. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами, топология и структура элементарных частиц // Сб. Критич. технол. и фундамент. пробл. физики конденсир. сред. Ульяновск. УлГУ, 2001. С. 42–72.
4. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure // Gravitation and Cosmology, 2011. Vol. 17. № 3. pp. 201–217.
5. Misner C.W., Wheeler J.A. // Ann. Phys. USA, 1957. №2. pp. 527–537.
6. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: И.Л., 1962. 352 с. с.
7. Мизнер Ч., Уилер Дж. Классическая физика как геометрия // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 542–554.
8. Сахаров А.Д.. Топологическая структура элементарных зарядов и СРТ-симметрия. В сб. Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1972, С. 542–554.
9. Клиффорд Б. О пространственной теории материи. Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 36–37.
10. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топологияю М.: Наука, 1989, 400 с.
11. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир – 1972.
12. Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А. Топология для физиков // Элементарные частицы (Шестая школа ИТЭФ): сб. статейю М: ИТЭФ, 1979. N.4. С. 5–60
13. Фейнман Р. Характер физических законов. М., Мир, 1968. С. 193–208.
14. Постников М.М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 561 с.
15. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984. 343 с.
17. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.

Поступила в редакцию 10.10.2014

Журавлев Виктор Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра Теоретической физики, Ульяновский государственный университет, 432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.  
E-mail: zhvictorm@gmail.com

**V. M. Zhuravlev**

## Geometry, topology and phiscal fields. Part I. Electric charge and interaction

*Keywords:* Topological interpretation of electric charge and mass, geometrization of electrodynamics, quantum theory, the theory of gravity

PACS: 02.40.-k, 03.65.-w, 04.50.Kd, 11.90.+t

In this paper we present a new approach to the construction of the theory of gravitational and electromagnetic interactions based on the geometric interpretation of the relevant fields to the topological invariants to describe the electric charges. In the first part of the paper sets out the main elements of the theory of the electromagnetic interaction in the new geometrical interpretation and its relation to the quantum theory of elementary particles. The second part develops the device description of gravitational fields close to Newton's gravitational theory and explores some of the consequences of it. In particular, discuss the question of the interpretation of the effect of hidden mass or «dark matter». Indicates a close relationship of gravitational fields and electromagnetic fields in the framework of this concept.

## REFERENCES

1. Zhuravlev V.M. Elektrodinamika s tcelochislennymi zaryadami i topologiyay. *Trudy mezhdunarodnoy konferencii. «Gravitation and magnetizm»*, Minsk, Belorusskiy State University, 1998. PP. 42–50.
2. Zhuravlev V.M. Elektrodinamika s tcelochislennymi zaryadami i topologiyay, *Izv. vuzov, Phusics*, 2000. №2. PP. 134–140.
3. Zhuravlev V.M. Elektrodinamika s tcelochislennymi zaryadami, topologiyay i struktura elementarnykh chastic. *Sbornik «Kriticheckie tekhnologii i problemy fiziki kondensirovannykh sred»*, Ulyanovsk, Ulyanovsk State University, 2001. pp. 42–72.
4. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure. *Gravitation and Cosmology*, 2011. Vol. 17. № 3. PP. 201–217.
5. Misner C.W., Wheeler J.A. *Ann. Phys. USA*, 1957. № 2. PP. 527–537.
6. Wheeler J.A. Neutrinos, Gravitation and Geometry. Tipografia Compositori, 1960. 352 p. Translated under the title *Gravitaciya, neytrino i Vselennaya*. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1962. 352 p.
7. Mizner Ch., Wheeler J.A. Klassicheskaya fizika kak geometriya. V sbornike *Albert Einstein i teoriya gravitacii*, Moscow, Mir, 1979, pp. 542–554.
8. Sakharov A.D. Topologicheskaya struktura elementarhykh chastic i CPT-simmetriya. V Sb. *Problemy teoretycheskoj fiziki*, Moscow, Nauka, 1972. PP. 542–554.
9. Clifford V. O prostranstvennoy prirode materii. V sbornike *Albert Einstein i teoriya gravitacii*, Moscow, Mir, 1979. PP. 36–37.
10. Shvartz A.S. *Kvantovaya teoriya poliya i topologiya*. Moscow, Nauka, 1989. 400 p.
11. Milnor J. W. Topology from the differentiable viewpoint. Princeton University Based on notes by David W. Weaver. The University Press of Virginia Charlottesville, 1965. Wallace A.H. Differential Topology. First Steps. University of Pennsylvania New York, W. A. Benjamin, 1968. Translated under the title *Differential'naya topologiya. Nachal'nyy kurs*. Moscow, Mir, 1972.
12. Shapiro I.S., Ol'shanentckiy M.A. Topologiya dlya fizikov. V sbornike *Elementarnye chasty (Shestaya shkola ITEF)*, 1979. №.4. PP.5–60.
13. Feynman R.P. The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics. Physics Today – 1966 – 19 – p. 31. Translated under the title *Kharakter fizicheskikh zakonov*, Moscow, Mir, 1968. PP. 193–208.
14. Postnikov M.M. *Vvedenie v teoriyu Morsa*, M.: Nauka, 1971. 561 p.
15. Hirsch M. W. Differential topology. Berlin: Springer-Verlag, 1976. 280 p. Translated under the title *Differential'naya topologiya*. M. Khirsh. Moscow, Mir, 1979. 280 p.
16. Dubrovin V.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriay*, Moscow, Nauka, 1984. 343 p.
17. Dubrovin V.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriay. Metody i prilozheniya*, Moscow, Nauka, 1979. 760 p.

Received 10.10.2014

Zhuravlev Victor Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Theoretical Physics department, Ulyanovsk State University, ul. Leo Tolstoy, 42, Ulyanovsk, 432017, Russia.  
E-mail: zhvictorm@gmail.com