

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

*Ю. Г. Игнатъев*¹, *А. А. Агафонов*², *Д. Ю. Игнатъев*³, *М. Л. Михайлов*⁴

**НЕМИНИМАЛЬНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СКАЛЯРНОГО
ПОЛЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ.
II. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ПЛАЗМЫ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ
ФАНТОМНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.**

На основе развитой ранее одним из авторов кинетической теории макроскопического описания плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием конструируются динамические космологические модели. С помощью методов численного моделирования в прикладном математическом пакете построены и проанализированы численные модели космологической эволюции при изменении параметров плазмы и скалярного взаимодействия в широких пределах.

Ключевые слова: Релятивистская кинетика, фантомные скалярные поля, космологическое ускорение, компьютерное моделирование.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Математическая модель

1.1. Математическая модель скалярно заряженной космологической плазмы

В предыдущей статье [1–3] была сформулирована математическая модель статистической системы скалярно заряженных частиц, основанная на микроскопическом описании и последующей процедуре перехода к кинетической теории. Строгими макроскопическими следствиями кинетической теории являются уравнения переноса, в том числе закон сохранения некоторого векторного тока, соответствующего микроскопическому закону сохранения в реакциях некоторого фундаментального заряда e (если таковой закон сохранения имеется) –

$$\nabla_i \sum_a e_a n_a^i = 0, \quad (1.1)$$

а также законы сохранения энергии - импульса статистической системы:

$$\nabla_i T_{pl}^{ik} \equiv \nabla_i \sum_a T_a^{ik} = \sigma \nabla^i \Phi, \quad (1.2)$$

где n_a^i – числовой вектор, а T_a^{ik} – тензор энергии импульса (МЕТ) “а” - го сорта частиц; σ – плотность скалярного заряда (определения см. в [3]). В условиях локального термодинамического равновесия (LTE) статистическая система является изотропной, и ее макроскопические моменты принимают вид соответствующих моментов идеальной жидкости [4]:

$$n_a^i = n_a u^i, \quad (1.3)$$

$$T_a^{ik} = (\mathcal{E}_a + \mathcal{P}_a) u^i u^k - \mathcal{P}_a g^{ik}, \quad (1.4)$$

где u^i – единичный времениподобный вектор динамической скорости статистической системы

$$(u, u) = 1. \quad (1.5)$$

Выясним, к чему приводят законы сохранения (1.1) – (1.2) в условиях LTE. Из соотношения нормировки (1.5) вытекает известное тождество:

$$u^k{}_{;i} u_k \equiv 0. \quad (1.6)$$

¹E-mail: ignatov_yu@rambler.ru

²E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

³E-mail: ignatyev.id@gmail.com

⁴E-mail: meschgan@mail.ru

С учетом (1.4) – (1.6) законы сохранения (1.2) можно привести к виду:

$$(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl})u^i{}_{,k}u^k = (g^{ik} - u^i u^k)(\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (1.7)$$

$$\nabla_k(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl})u^k = (\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k})u^k, \quad (1.8)$$

а закон сохранения фундаментального заряда (1.1) становится:

$$\nabla_k n_e u^k = 0, \quad n_e \equiv \sum_a e_a n_a. \quad (1.9)$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}, \mathcal{P}, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости u^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (1.7) – (1.9)⁵. Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения:

$$f_a^0 = \frac{1}{e^{(-\mu_a + (u, p))/\theta}} \pm 1, \quad (1.10)$$

где μ_a – химический потенциал, θ – локальная температура. При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляры, $\mathcal{E}, \mathcal{P}, n_e, \sigma$, определяются двумя скалярами – некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ [1, 3]:

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.11)$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.12)$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.13)$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.14)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_a \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}, \quad (1.15)$$

где

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_a = \frac{\mu_a}{\theta}. \quad (1.16)$$

Таким образом, система уравнений (1.7) – (1.9) оказывается полностью определенной.

1.2. Космологическая модель

Рассмотрим сформулированную выше самосогласованную математическую модель применительно к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

В этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Нетрудно убедиться, что $u^i = \delta_4^i$ обращает уравнения (1.7) в тождества, а система уравнений (1.8) – (1.9) сводятся к двум уравнениям:

$$\dot{\mathcal{E}}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) = \sigma \dot{\Phi}; \quad (1.17)$$

$$\dot{n}_e + 3\frac{\dot{a}}{a}n_e = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, остаются 2 дифференциальных уравнения относительно двух термодинамических функций μ и θ .

⁵одно из уравнений (1.7) является зависимым от остальных вследствие тождества (1.6)

В этом случае ТЭИ скалярного поля также принимает вид ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \quad (1.19)$$

причем:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2); \quad (1.20)$$

$$\mathcal{P}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2), \quad (1.21)$$

так что:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \dot{\Phi}^2. \quad (1.22)$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \epsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1 \sigma(t). \quad (1.23)$$

К этим уравнениям необходимо добавить нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (1.24)$$

где \mathcal{E} – суммарная плотность энергии плазмы и скалярного поля. Эта система уравнений описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции полностью вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием (см. [3]).

1.3. Макроскопические скаляры для вырожденной однокомпонентной Ферми-системы

Интерес к исследованию вырожденной Ферми-системы скалярно заряженных частиц обусловлен как максимальной простотой математической модели, так и возможностью интерпретации такой системы как космологической темной (холодной) материи. При этом мы не будем налагать каких-либо ограничений на величину скалярного заряда частиц, рассматривая, в том числе, ситуации, когда эта величина может быть больше единицы.

В условиях полного вырождения:

$$\theta \rightarrow 0. \quad (1.25)$$

локально равновесная функция распределения фермионов (1.10) принимает вид ступенчатой функции [4]:

$$f^0(x, P) = \chi_+(\mu - \sqrt{m_*^2 + p^2}), \quad (1.26)$$

где $\chi_+(z)$ есть ступенчатая функция Хевисайда. В этом случае результат интегрирования макроскопических плотностей (1.11) – (1.15) выражается в элементарных функциях [4]:

$$n = \frac{1}{\pi^2} p_F^3; \quad (1.27)$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (1.28)$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (1.29)$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (1.30)$$

где введена безразмерная функция ψ

$$\psi = p_F / m_*, \quad (1.31)$$

равная отношению импульса Ферми, p_F , к эффективной массе фермиона.

При переходе к пределу $\mu \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow 0$ мы получаем систему двух уравнений на одну функцию, и возникает проблема противоречивости этих уравнений, причем эта проблема не зависит от наличия скалярного поля. Ниже мы покажем, что эта проблема кажущаяся, на самом деле

никаких противоречий в системе уравнений (1.17) – (1.18) не возникает и в случае вырожденной Ферми-системы. Действительно, дифференцируя плотность энергии Ферми-системы (1.28) и учитывая тождество:

$$\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl} \equiv \frac{m_*^4}{3\pi^2} \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (1.32)$$

приведем закон сохранения энергии для Ферми-системы (1.17) к виду уравнения:

$$\frac{d}{dt} \ln m_* \psi a = 0. \quad (1.33)$$

Отсюда с учетом определения функции ψ (1.31) получаем:

$$ap_F = \text{Const}. \quad (1.34)$$

Таким образом, с учетом (1.27) получаем закон сохранения числа фермионов:

$$a^3 n = \text{Const}. \quad (1.35)$$

Таким образом, несмотря на кажущуюся сложность уравнения (1.17), решение его находится легко — закон сохранения энергии вырожденной Ферми-системы сводится к закону сохранения числа фермионов. Поэтому для исследования космологической эволюции вырожденной Ферми-системы остается проинтегрировать одно уравнение Эйнштейна и одно полевое уравнение.

1.4. Макроскопические скаляры для Больцмановской двухкомпонентной плазмы

Рассмотрим теперь Больцмановскую плазму, далекую от вырождения; это означает, во-первых, что приведенные химические потенциалы являются малыми функциями –

$$\gamma_a(t) \rightarrow 0 \quad (1.36)$$

и, во-вторых, что можно пренебречь в знаменателях (1.11)–(1.15) статистическими факторами ± 1 . Выполнив интегрирование в (1.11)–(1.15), получим:

$$n_a = \frac{2S+1}{\pi^2} m_*^3 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a} e^{\gamma_a}; \quad (1.37)$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_a)}{\lambda_a} - \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2} \right); \quad (1.38)$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) m_*^4 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2}; \quad (1.39)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q_a (m + q_a \Phi)^3 \frac{K_1(\lambda_a)}{\lambda_a}, \quad (1.40)$$

где

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \text{ch } t} \text{sh}^{2n} t dt \quad (1.41)$$

– функции Бесселя мнимого аргумента (см., например, [5]), $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

В этой статье для простоты мы рассмотрим идеализированную двухкомпонентную плазму, состоящую только из скалярно заряженных частиц и античастиц:

$$m_+ = |m + q\Phi|; \quad m_- = |m - q\Phi|, \quad (1.42)$$

у которых в условиях ЛТР суммарный химический потенциал равен нулю:

$$\gamma + \bar{\gamma} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} = -\gamma. \quad (1.43)$$

Предположим, что этим частицам соответствует также некоторый сохраняющийся фундаментальный заряд e , тогда согласно (1.18) в случае зарядово симметричной по этому заряду плазмы должен выполняться закон сохранения:

$$m_+^3 \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+} e^\gamma - m_-^3 \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-} e^{-\gamma} = 0 \Rightarrow e^{2\gamma} = \frac{m_-^3 \lambda_+ K_2(\lambda_-)}{m_+^3 \lambda_- K_2(\lambda_+)}. \quad (1.44)$$

Таким образом, химический потенциал определяется полностью при заданных значениях локальной температуры плазмы, θ , и скалярного потенциала, Φ . В частности, при

$$m_- = m_+ \quad (1.45)$$

из (1.44) получим точное решение, которое реализуется лишь в двух крайних случаях:

$$m_- = m_+ = m_* \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1. & m = 0; & m_* = |q\Phi| \\ 2. & q = 0; & m_* = m. \end{cases} \quad (1.46)$$

В этих и только в этих случаях скалярно заряженные частицы и античастицы являются симметричными, – в других случаях их эффективные массы покоя должны быть разными.

В этой статье мы будем рассматривать случай симметричной Больцмановской плазмы (1.46), когда частицы и античастицы имеют одинаковую массу (1.45). В этом случае в качестве искомой функции удобно выбрать $\lambda_*(t) = \lambda_- = \lambda_+$ вместо размерной функции $\theta(t)$. Выражения для макроскопических скаляров (1.38)–(1.40) принимают вид:

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{2}{\pi^2} m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2} \right); \quad (1.47)$$

$$\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl} = \frac{2}{\pi^2} m_*^4 \frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*}; \quad (1.48)$$

$$\sigma = \frac{2q^2}{\pi^2} \Phi \frac{K_1(\lambda_*)}{\lambda_*} (3m^2 + q^2 \Phi^2). \quad (1.49)$$

2. Численное моделирование

2.1. Определение задачи Коши

С учетом закона сохранения числа частиц задача о космологической эволюции статистической системы скалярно заряженных частиц сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений: уравнения первого порядка (1.24) – уравнения Эйнштейна и уравнения второго порядка (1.23) – уравнения поля. Для постановки задачи Коши для системы (1.23) – (1.24) необходимо задать начальные условия для величин $a(t_0)$, $\Phi(t_0)$, $\dot{\Phi}(t_0)$, $\theta(t_0)$. Будем полагать в дальнейшем⁶:

$$t_0 = 0; \quad a(0) = 1; \quad \dot{\Phi}(0) = 0. \quad (2.1)$$

В космологическом сценарии, соответствующем начальным условиям (2.1), в момент времени $t = 0$ кинетическая энергия скалярного поля обращается в нуль, а уравнение состояния скалярного поля принимает вид:

$$\mathcal{P}_s(0) + \mathcal{E}_s(0) = 0. \quad (2.2)$$

Заметим, что выбор начального момента времени t_0 произволен, а второе из условий (2.2) фактически определяет лишь единицу масштаба и всегда реализуемо. Поэтому, фактически, необходимо задать лишь начальные условия для одной искомой потенциальной функции $\Phi(0)$, а также определить константу в соотношении (1.35). В случае Больцмановской системы «частицы - античастицы» эта константа равна нулю, что приводит к решению (1.44), а в случае вырожденной однокомпонентной Ферми-системы эту константу можно определить с помощью отношения (1.34), которое с учетом (2.1) принимает вид:

$$p_F(0) = p_0. \quad (2.3)$$

Однако, задание в качестве начальных условий размерных функций p_0 (или θ_0 – для Больцмановской плазмы) и Φ_0 не очень удобно для численного моделирования. Вместо них мы зададим две безразмерные скалярные функции, имеющие явный физический смысл:

$$\varkappa_{pl}(t) = \frac{\mathcal{P}_{pl}(t)}{\mathcal{E}_{pl}(t)} \Rightarrow \varkappa_{pl}^0 = \varkappa_{pl}(0); \quad \in [0, 1/3]; \quad (2.4)$$

$$\eta_S = \frac{\mathcal{E}_S(t)}{\mathcal{E}_{pl}(t)} \Rightarrow \eta_S^0 = \eta_S(0); \quad \in (-\infty, +\infty). \quad (2.5)$$

⁶системы с ненулевой начальной кинетической энергией скалярного поля мы рассмотрим в следующей статье

Задавая отношение \varkappa_{pl}^0 , мы можем определить начальный импульс Ферми p_0 (либо θ_0), а задавая затем η_S^0 , мы можем определить Φ_0 . Введем также необходимые для анализа безразмерные скалярные функции $\varkappa(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{P} = \varkappa(\mathcal{E})\mathcal{E} \Rightarrow (\mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{pl}) = \varkappa(\mathcal{E})(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl}) \quad (2.6)$$

– суммарный коэффициент баротропы и $\Omega(\mathcal{E})$:

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa) \quad (2.7)$$

– инвариантное космологическое ускорение. В такой постановке задача определяется четырьмя независимыми начальными условиями – неизменяемыми вторым и третьим условиями (2.1), изменяемыми (2.4) и (2.5), а также тремя параметрами – фундаментальными константами: m, q, m_s . Таким образом, в задаче 5 произвольных констант.

2.2. Размерность физических величин

Из определения эффективной массы, а также из определения плотности энергии скалярного поля следует размерность этих величин в единицах комптоновской длины

$$\begin{aligned} [t] &= l/c \rightarrow \ell; & [m] &= [\mu] = \hbar/lc \rightarrow \ell^{-1}; \\ [\mathcal{E}] &\rightarrow \ell^{-4}; & [\Phi] &= [m] = [\mu] \rightarrow \ell^{-1}; & [q] &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В обычных единицах $[m, l, t]$ заряд q имеет размерность $m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$, а потенциал скалярного поля – $[\Phi] = m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$. Таким образом, в планковских единицах, которые используются в статье, значение $q\Phi \sim 1$ соответствует эффективной массе скалярно заряженных частиц порядка планковской массы.

Далее, поскольку при численном решении задачи приходится иметь дело с очень большими числами, необходимо предварительно масштабировать задачу. Введем вместо масштабного фактора безразмерную функцию:

$$\Lambda = \ln a(t); \quad \Lambda(0) = 0, \quad (2.9)$$

так что:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \quad (2.10)$$

есть постоянная Хаббла, а инвариантное космологическое ускорение выражается через Λ следующим образом:

$$\Omega = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}}{\dot{\Lambda}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (2.11)$$

Заметим, что часто используемое в космологических моделях приближение *медленного скатывания*, которое мы здесь нигде не используем:

$$|\dot{H}| \ll H^2, \quad (2.12)$$

можно записать в виде с учетом (2.11):

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \equiv |\Omega - 1| \ll 1 \Rightarrow \Omega \rightarrow 1 \Rightarrow \varkappa \rightarrow -1. \quad (2.13)$$

2.3. Нормальная система уравнений для газа Ферми

С помощью введенных безразмерных переменных выражение для функции ψ в модели вырожденной Ферми - системы можно записать в виде:

$$\psi = \frac{p_0}{m_*} e^{-\Lambda}. \quad (2.14)$$

Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений приведем их предварительно к нормальному виду, полагая:

$$Z(t) = \dot{\Phi} \quad (2.15)$$

и разрешая полученную систему относительно производных $\dot{\Lambda}$, $\dot{\Phi}$ и \dot{Z} , получим нормальную систему уравнений:

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_s}; \quad (2.16)$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (2.17)$$

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z - \epsilon_2 m_s^2 \Phi - 4\pi\epsilon_1 \sigma, \quad (2.18)$$

в уравнение (2.16) которой необходимо подставить выражения для плотности энергии Ферми-системы (1.28) и скалярного поля (1.20) с учетом определения функции ψ (2.14) и уравнения (2.17), а в уравнение (2.18) подставить выражение для $\dot{\Lambda}$ из полученного уравнения (2.16) и выражение для σ из соотношения (1.30).

2.4. Нормальная система дифференциальных уравнений для симметричной Больцмановской плазмы

Произведя необходимые вычисления, получим нормальную систему дифференциальных уравнений для симметричной Больцмановской плазмы:

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{\frac{2}{\pi^2} m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2} \right) + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (Z^2 + \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2)} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} = -Z \sqrt{24\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi^2} m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2} \right) + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (Z^2 + \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2)} \\ - \epsilon_2 m_s^2 \Phi - \epsilon_1 \frac{16q^2}{\pi} \Phi \frac{K_1(\lambda_*)}{\lambda_*} (m^2 + mq\Phi + q^2 \Phi^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_* = \frac{\lambda_* \dot{\Lambda}}{1 + \frac{\lambda_* K_2(\lambda_*)}{3K_3(\lambda_*)}} + \frac{q\dot{\Phi}}{m_*^4 \left(3 \frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*^2} + \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*} \right)} \times \\ \left[4(m + q\Phi)^3 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2} \right) - q\Phi(3m^2 + q^2 \Phi^2) \frac{K_1(\lambda_*)}{\lambda_*} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где в уравнение (2.22) необходимо подставить выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (2.19).

Необходимо, однако, помнить, что рассматриваемая здесь симметричная задача может быть реализована лишь в двух случаях (1.46). Рассмотрим их подробнее. Второй случай описывает модель с минимальным взаимодействием.

Модель с минимальным взаимодействием $q = 0$. В этом случае $m_{\pm} = m$, $\lambda_{\pm} = \lambda$, в уравнении (2.19) необходимо учесть этот факт, а уравнения (2.20), (2.22) упрощаются:

$$\dot{Z} = -Z \sqrt{24\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi^2} m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2} \right) + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (Z^2 + \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2) - \epsilon_2 m_s^2 \Phi}; \quad (2.23)$$

$$\ln \dot{\lambda} = \dot{\Lambda} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda K_2(\lambda)}{K_3(\lambda)} \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Из уравнения (2.24) в ультрарелятивистском пределе, учитывая асимптотику функций Бесселя:

$$K_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2^{n-1} \Gamma(n)}{z^n}, \quad (2.25)$$

сразу следует:

$$\ln C\lambda = \Lambda \Rightarrow \lambda \sim a(t) \Rightarrow \theta \sim a^{-1}(t) \quad (2.26)$$

– закон космологической эволюции температуры в ультрарелятивистской плазме.

Модель с нулевой массой покоя $m = 0$. В этом случае $m_{\pm} = |q\Phi|$, $\lambda_{\pm} = \lambda_* = |q\Phi|/\theta$. В этом случае уравнения (2.20) и (2.22) модифицируются следующим образом:

$$\dot{Z} = -Z\sqrt{24\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi^2}m_*^4\left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*^2}\right) + \frac{\varepsilon_1}{8\pi}(Z^2 + \varepsilon_2m_s^2\Phi^2) - \varepsilon_2m_s^2\Phi - \varepsilon_1\frac{16q^4\Phi^3}{\pi}\frac{K_1(\lambda_*)}{\lambda_*}}; \quad (2.27)$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (2.28)$$

$$\frac{d\ln\lambda_*}{dt} = \frac{d\ln(a|\Phi|)}{dt} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_*K_2(\lambda_*)}{3K_3(\lambda_*)}}. \quad (2.29)$$

В общем случае уравнение (2.29) также решается в квадратурах:

$$\int_0^{\lambda_*} \left[1 + \frac{zK_2(z)}{3K_3(z)}\right] \frac{dz}{z} = a\Phi. \quad (2.30)$$

Учитывая далее рекуррентные соотношения между функциями Бесселя

$$\frac{d}{dz}K_n(z)z^n = -K_{n-1}(z)z^n,$$

можно вычислить интеграл (2.30) и получить:

$$K_3(\lambda_*) = (a\Phi - \Phi_0)^{-3}K_3(\lambda_*^0) \quad (2.31)$$

алгебраическую связь между функциями $a(t), \Phi(t), \theta(t)$. При этом, как и в случае вырожденной Ферми-системы, остаются нерешенными лишь 2 дифференциальных уравнения (три для нормальной системы). Заметим, что из (2.31) в ультрарелятивистском пределе получается асимптотически точное решение:

$$\lambda_* \underset{\lambda_* \rightarrow 0}{\approx} \lambda_0(a\Phi - \Phi_0) \Rightarrow \frac{|\Phi|}{\theta} \approx \frac{|\Phi_0|}{\theta_0}(a\Phi - \Phi_0), \quad (2.32)$$

которое при достаточно больших значениях масштабного фактора снова дает ультрарелятивистский закон эволюции обратной температуры (2.26):

$$\lambda_* \sim a(t)|\Phi| \Rightarrow \theta(t) \sim a^{-1}(t). \quad (2.33)$$

3. Результаты численного моделирования

3.1. Алгоритмы численного моделирования

Численное интегрирование системы уравнений (2.16)–(2.18) проводилось в прикладном математическом пакете «Mathematica, v.9». Поскольку система дифференциальных уравнений обнаруживает признаки жесткости, использовался численный метод с автоматическим переключением от метода stiff к точному методу Рунге-Кутты в формате

```
Method ->{StiffnessSwitching,
Method ->{ExplicitRungeKutta, Automatic}},
AccuracyGoal -> 20, PrecisionGoal -> 5,
MaxSteps ->20000
```

с максимальным числом шагов 20000. Ниже приведены некоторые результаты моделирования⁷. Для удобства классификации мы будем говорить о скалярном поле, как о поле бозонов, причем в случае $m_s \ll 1$ будем говорить о легких бозонах, в случае $m_s \simeq 1$ – о тяжелых. То же самое относится и к частицам плазмы: $m \ll 1$ – легкие частицы, $m \simeq 1$ – тяжелые; также и $q \simeq 1$ – тяжелые фермионы благодаря уже их потенциальной энергии. Далее, в случае $\eta_S \ll 1$ мы будем

⁷ не более 5% от общего числа.

говорить о плазменно-доминированной системе, в случае $\eta_s \gg 1$ – о скалярно-доминированной системе. Всюду в представленных графиках классификация проводится по начальным значениям χ_{pl}^0, η_S^0 .

Далее, в графическом представлении результатов моделирования будет использована авторская функция:

$$\text{Lig}(x) \equiv \text{sgn}(x) \lg(1 + |x|), \quad (3.1)$$

необходимая для представления результатов в логарифмической шкале в тех случаях, когда отображаемая функция может менять знак. Введенная нами функция $\text{Lig}(x)$ удобна тем, что при малых значениях аргумента функция совпадает со значением аргумента, а при больших значениях аргумента – с его десятичным логарифмом, взятом со знаком аргумента:

$$\text{Lig}(x) \approx \begin{cases} x, & |x| \rightarrow 0; \\ \text{sgn}(x) \ln |x|, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\text{Lig}(x)}{dx} \geq 0,$$

что обеспечивает непрерывную дифференцируемость функции $\text{Lig}(x)$ и тем самым – биективность отображения (3.1). Обратный пересчет осуществляется по формуле:

$$x = \begin{cases} 10^{\text{Lig}(x)} - 1, & x \geq 0; \\ 1 - 10^{-\text{Lig}(x)}, & x < 0. \end{cases}$$

Далее, основные результаты численного моделирования в графической форме будут сгруппированы в пары, в которой первому рисунку будет соответствовать случай вырожденной Ферми-системы, второму – двухкомпонентной Больцмановской плазме. При этом в каждой паре представлены результаты с одинаковыми значениями фундаментальных констант m, q, m_s и одинаковыми начальными условиями χ_{pl}^0, η_S^0 (2.4) – (2.5).

3.2. Ультррелятивистские частицы $\chi_{pl}^0 = 1/3; m = 0$, фантомное скалярное поле $m_s = 0.001$, скалярно-доминированная система: $\eta_S^0 = 100$

Заданным начальным параметрам и константам соответствуют для Ферми-системы следующие приближенные начальные значения импульса Ферми, p_F^0 , и скалярного потенциала, Φ_0 , $-\ [q, p_F^0, \Phi_0]$: $[0.001, 0.0112, -0.99]$, $[0.1, 0.0035, -0.100]$, $[1, 0.0011, -0.0100]$, $[10, 0.00035, -0.00100]$.

Для Больцмановской плазмы начальными значениями и параметрами являются $[q, \lambda_0, \Phi_0]$, для которых получаются следующие приближенные значения:

$[0.001, 0.141, 0.361]$, $[0.1, 0.141, 0.0000361]$, $[1, 0.141, 3.61 \cdot 10^{-7}]$, $[10, 0.1414210.141, 3.61 \cdot 10^{-9}]$.

Приведем результаты численного моделирования для указанных выше случаев.

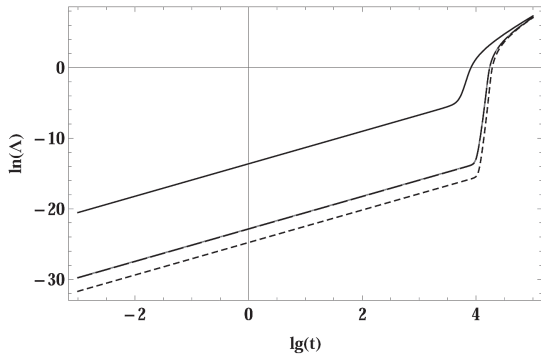


Рис. 1. Зависимость эволюции масштабной функции $\lg \Lambda(t)$ от величины скалярного заряда фермионов. Сверху – вниз: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.

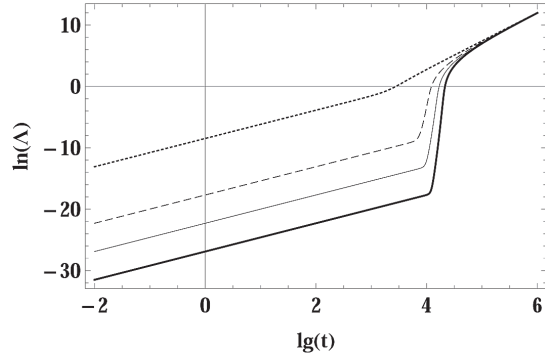


Рис. 2. Зависимость эволюции масштабной функции $\lg \Lambda(t)$ от величины скалярного заряда для Больцмановской плазмы. Сверху – вниз: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$.

На следующем рисунке показана зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда. Характерным является наличие «фантомных сталагмитов» – характерных всплесков ускорения на временах порядка $3 \div 5 \cdot 10^3 t_{pl}$. Графики $\varkappa(t)$, наоборот содержат «фантомные сталактиты» в этих же временах эволюции. Следует отметить, что данные фантомные выбросы не являются результатом ошибок численных расчетов – этот факт неоднократно проверялся в различных моделях и при различной точности вычислений. Указанные фантомные сталагмиты соответствуют фантомным сталактитам на графиках скалярного потенциала.

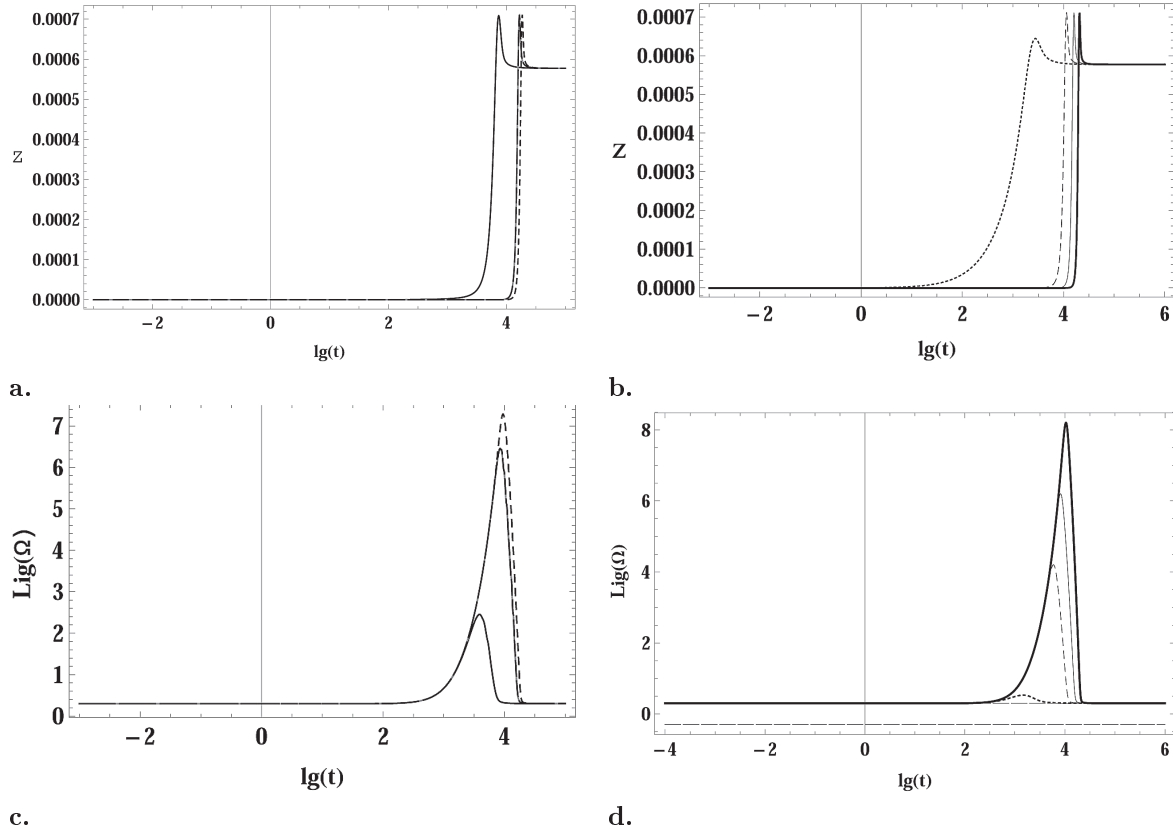


Рис. 3. **a:** Зависимость эволюции производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$ от величины скалярного заряда фермионов. Слева – направо: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.
b: Зависимость эволюции производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$ от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Слева – направо: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$.
c: Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда фермионов. Снизу – вверх: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.
d: Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Снизу – вверх: $0.001; 0.1; 1; 10$. Горизонтальные пунктирные прямые соответствуют значениям $\Omega = -1$ (нижняя) и $\Omega = +1$ (верхняя).

Отметим, что появление острых фантомных всплесков сверхускорения (величины ускорения порядка $10^2 \div 10^7!$) во времена порядка $10^3 \div 10^4 t_{pl}$ с одновременным увеличением отрицательной кинетической энергии фантомного поля при величине скалярного заряда $q \gtrsim 0.1$ является характерным свойством нашей модели неминимального взаимодействия. После всплесков ускорения модель выходит на стандартное инфляционное расширение $\Omega \rightarrow 0$. Очевидно, что существование таких всплесков сильно нарушает приближение медленного скатывания (2.12), которое является необходимым атрибутом подавляющего большинства космологических моделей. Заметим также, что подобные всплески происходят на временах, меньших $10^5 \div 10^6 t_{pl}$, на которых согласно распространенным теоретическим представлениям (см., например, [7]) происходит формирование плоского спектра гравитационных возмущений. Наличие существенных нарушений приближения медленного скатывания, вероятно, может повлиять на окончательную форму спектра гравитационных возмущений и оставить на нем характерные «засечки». Отметим также, что подобное поведение обнаруживается даже у скалярно доминированной системы.

На Рис. 4,5 показана зависимость эволюции суммарной плотности энергии, \mathcal{E} , от величины скалярного заряда частиц для Ферми - и Больцмановской систем, а на Рис. 6,7 — зависимость эволюции параметра η_S (2.5) от величины скалярного заряда частиц для Ферми - и Больцмановской систем.

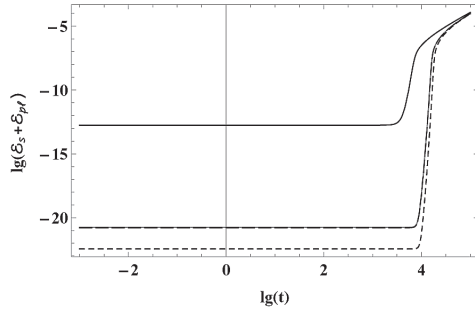


Рис. 4. Зависимость эволюции инвариантного суммарной плотности энергии \mathcal{E} от величины скалярного заряда фермионов. Сверху – вниз: $q = 0; 0.001; 0.1; 10$.

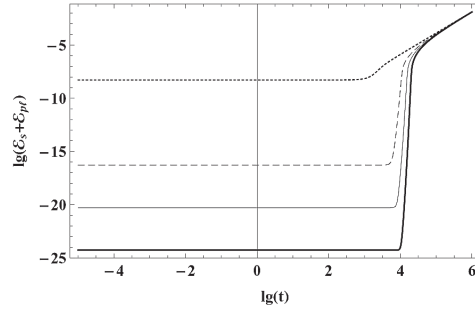


Рис. 5. Зависимость эволюции инвариантного суммарной плотности энергии \mathcal{E} от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Сверху – вниз: $q = 0; 0.001; 0.1; 10$.

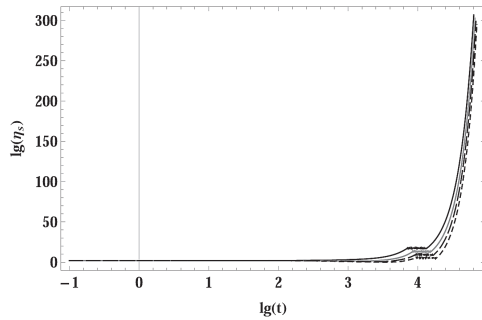


Рис. 6. Зависимость эволюции параметра η_S от величины скалярного заряда фермионов. Сверху – вниз: $q = 0.001; 0.1; 10$.

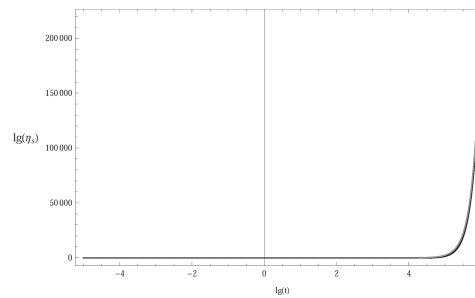


Рис. 7. Зависимость эволюции параметра η_S от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Сверху – вниз: $q = 0; 0.001; 0.1; 10$.

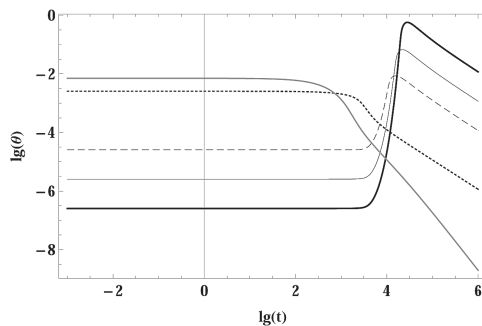


Рис. 8. Зависимость эволюции десятичного логарифма температуры Больцмановской плазмы θ от величины скалярного заряда частиц. Снизу – вверх: $q = 0; 0.001; 0.1; 10$.

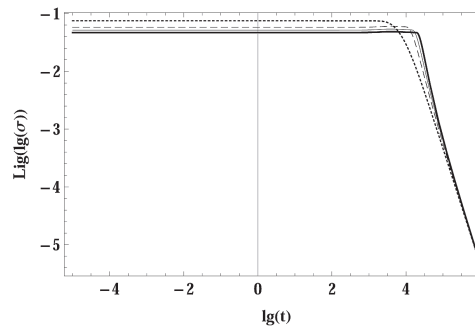


Рис. 9. Зависимость эволюции функции $Llg(lg(\sigma))$ скалярной плотности заряда от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Сверху – вниз: $q = 0; 0.001; 0.1; 10$.

Из этих рисунков видно, что, во-первых, график суммарной плотности энергии выходит на общую асимптоту в переменных $(\lg t, \lg \mathcal{E})$, что соответствует степенному закону роста суммарной энергии, и, во-вторых, что отношение абсолютной величины плотности энергии скалярного поля к плотности энергии Ферми-системы быстро растет, достигая при $t \sim 10^5$ огромных значений $\eta_S \sim 10^{300}$! Приведенный пример показывает, что на больших временах $t > 10^5$ модель практически не зависит от величины заряда и обнаруживает поведение, близкое к поведению минимальной модели. Однако, при $t < 10^5$ поведение модели сильно зависит от величины скалярного заряда.

Далее, на Рис. 8,9 показана космологическая эволюция температуры и скалярного потенциала для Больцмановской системы. На графиках Рис. 8 видны ярко выраженные всплески температуры плазмы, возникающие в те же времена, что и фантомные всплески космологического ускорения. Величина всплеска температуры растет с величиной скалярного заряда частиц. Всплески температуры, как и всплески ускорения, также появляются при $q \geq 0.1$. Как видно из графиков, температура плазмы во времена $5 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^4 t_{Pl}$ может подниматься на $3 \div 7$ порядков.

3.3. Ультррелятивистские фермионы $\kappa_{pl}^0 = 1/3; m = 0, m_s = 0.001, 0$ фантомное скалярное поле, плазма-доминированная система: $\eta_S^0 = 0.01$

Заданным начальным параметрам и константам в случае Ферми-системы соответствуют следующие приближенные начальные значения импульса Ферми, p_F^0 , и скалярного потенциала, Φ_0 : $[[q, p_F^0, \Phi_0]: [0.001, 0.000512, 0.0021], [0.1, 5.15 \cdot 10^{-6}, 2.11 \cdot 10^{-7}], [1, 5.05 \cdot 10^{-6}, 2.04 \cdot 10^{-7}], [10, 1.92 \cdot 10^{-6}, 3.00 \cdot 10^{-8}]]$.

Для Больцмановской плазмы начальными значениями и параметрами являются $[q, \lambda_0, \Phi_0]$, для которых получаются следующие приближенные значения: $[0.001, 0.141, 36.1], [0.1, 0.141, 0.0036], [1, 0.141, 1, 0.000036], [10, 0.141, 3.61199 \cdot 10^{-7}]$.

В этом случае получаются следующие результаты (Нвс/10¹¹):

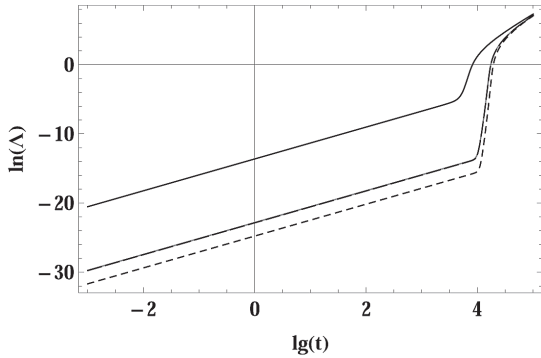


Рис. 10. Зависимость эволюции масштабной функции $\lg \Lambda(t)$ от величины скалярного заряда фермионов. Сверху – вниз: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.

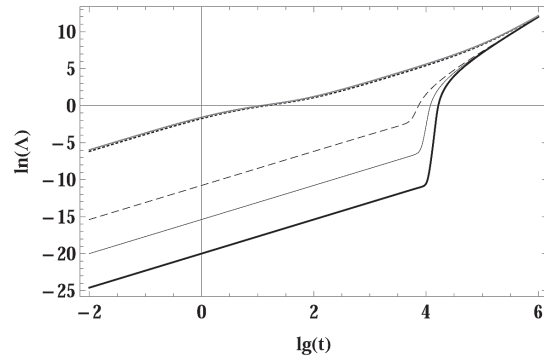


Рис. 11. Зависимость эволюции масштабной функции $\lg \Lambda(t)$ от величины скалярного заряда для Больцмановской плазмы. Сверху – вниз: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Кроме того, на графике серой линией (сливается с точечной) изображена эволюция масштабного фактора для минимальной модели с $m = 0.04$.

Мы видим, что появление фантомных всплесков ускорения перед выходом на стандартный инфляционный режим во времена порядка $10^3 \div 10^4 t_{Pl}$ в системе скалярно заряженных частиц является весьма устойчивым явлением. Заметим, что по сравнению со случаем, описанным выше, в данном случае начальное отношение энергии скалярного поля к энергии плазмы меньше на 4 порядка. Устойчивым является также температурный скачок на этом временном отрезке. Величина же его уменьшается с увеличением начальной степени энергодоминантности плазмы.

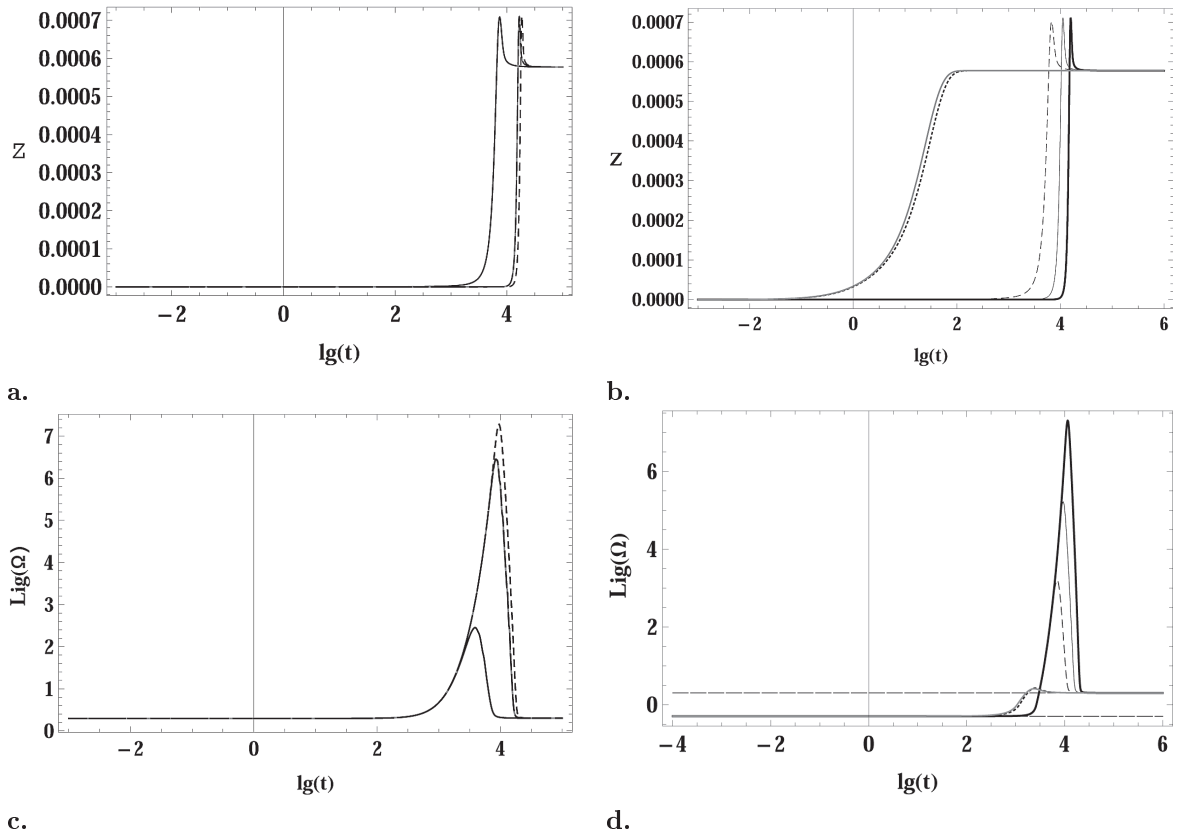


Рис. 12. **a:** Зависимость эволюции производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$ от величины скалярного заряда фермионов. Слева – направо: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.
b: Зависимость эволюции производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$ от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Слева – направо: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0, m = 0.04$ и $q = 0.001$ практически сливаются.
c: Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда фермионов. Снизу – вверх: $q = 0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0.1$ и $q = 1$ сливаются.
d: Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Снизу – вверх: $0.001; 0.1; 1; 10$. Линии с $q = 0, m = 0.04$ и $q = 0.001$ практически сливаются. Горизонтальные пунктирные прямые соответствуют значениям $\Omega = -1$ (нижняя) и $\Omega = +1$ (верхняя).

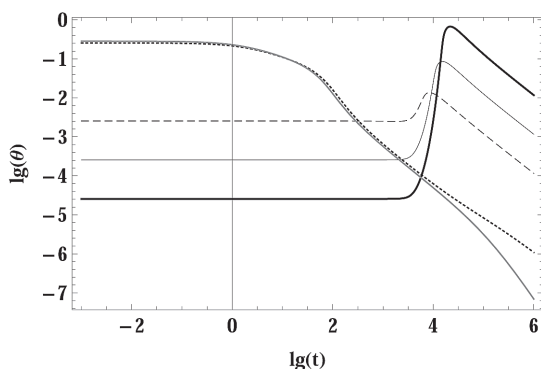


Рис. 13. Зависимость эволюции десятичного логарифма температуры Больцмановской плазмы θ от величины скалярного заряда частиц. Снизу – вверх: $q = 0; 0.001; 0.1; 1; 10$.

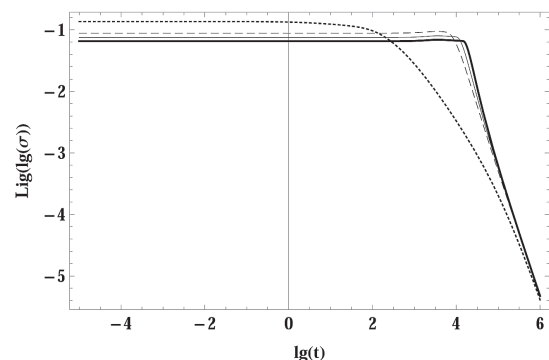


Рис. 14. Зависимость эволюции функции $\text{Lig} \lg(\sigma)$ скалярной плотности заряда от величины скалярного заряда Больцмановского газа. Сверху – вниз: $q = 0; 0.001; 0.1; 1; 10$.

3.4. Сравнение со случаем классического скалярного поля.

Релятивистские фермионы $p_F^0 = 3; m = 1, m_s = 0.1, \Phi_0 = 0.35$

Приведем результаты сравнения для систем с классическим и фантомным скалярными полями. В этом случае мы возьмем одинаковые начальные условия (Рис. 15–16).

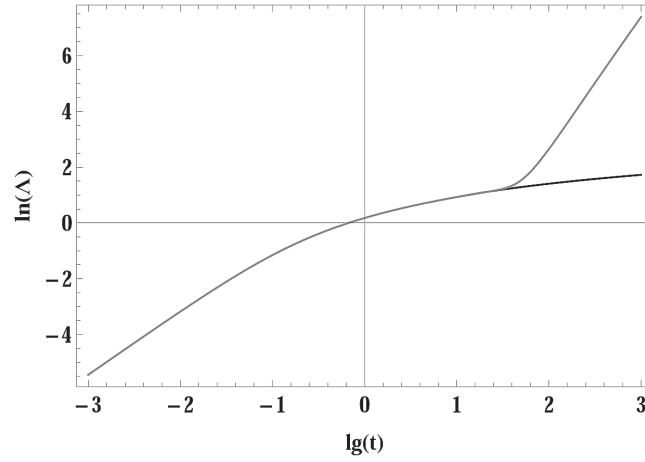


Рис. 15. Зависимость эволюции масштабной функции $\lg \Lambda(t)$ от величины скалярного заряда фермионов. Серая линия – фантомное поле, черная - классическое.

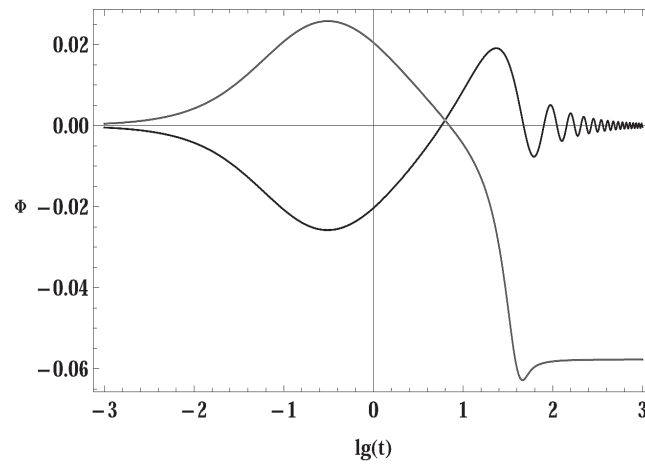


Рис. 16. Зависимость эволюции производной потенциала $\dot{\Phi}$ от величины скалярного заряда фермионов. Серая линия – фантомное поле, черная - классическое.

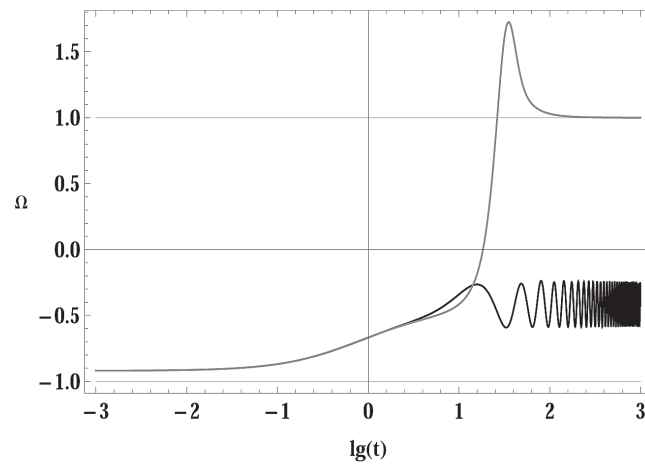


Рис. 17. Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда фермионов. Серая линия – фантомное поле, черная - классическое.

На Fig. 18 показана зависимость эволюции параметра η_S (2.5) от величины скалярного заряда фермионов.

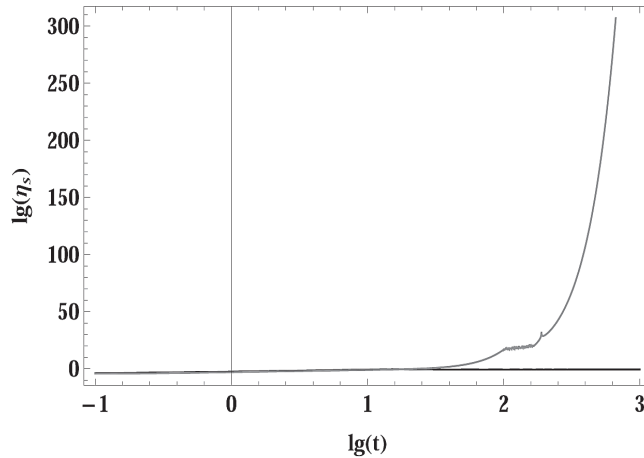


Рис. 18. Зависимость эволюции параметра η_S от величины скалярного заряда фермионов. Серая линия – фантомное поле, черная - классическое.

Заключение

Таким образом, можно констатировать, что на больших временах $\sim 10^5 t_{Pl}$ космологическая эволюция материи, основанной на Ферми-системе скалярно-заряженных частиц с фантомным взаимодействием, не отличается от эволюции материи с минимальным скалярным взаимодействием. Однако, при временах, меньших, $10^5 t_{Pl}$ эволюция материи с неминимальным скалярным взаимодействием отличается большим разнообразием и наличием фантомных всплесков. При этом, в отличие от системы с классическим скалярным взаимодействием в системе фермионов с фантомным скалярным взаимодействием не возникают микроскопические колебания, могущие привести к разогреву системы и рождению вторичных частиц. Заметим также, что здесь описана весьма малая часть полученных результатов численного моделирования. Систематическому изложению этих результатов и их анализу будет посвящена отдельная статья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Г. Игнат'ев. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 1 – 2014. – с. 47–69.
2. Yu.G. Ignatyev and D.Yu. Ignatyev. Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 20, No 4, 2014.
3. Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 20, No 4, 2014.
4. Yu.G. Ignat'ev, Russian Physics Journal, **26**, No 12, 9 (1983).
5. Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 360 с.
6. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov, Grav. and Cosmol., **17**, 71 (2011); arXiv:1011.5774[gr-qc].
7. Alexei A. Starobinsky. Lectures on modern problems of cosmology. // Proceeding of International School on Gravitation and Cosmology «Gracos-2014» /Edited by prof. Yu.G. Ignat'ev. - -Russia, Kazan: Kazan Federal University. – 2014, p. 48–58.

Поступила в редакцию 26.08.2014

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

Агафонов Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., ст. преподаватель, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Игнат'ев Дмитрий Юрьевич, к.ф.-м.н., пост. док., кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatyev.id@gmail.com

Михайлов Михаил Леонидович, инженер, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: meschgan@mail.ru

Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov, D. Yu. Ignatyev, M.L. Mikhailov
Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics. II. Cosmological evolution of the plasma with interparticle fantom interaction.

Keywords: Relativistic Kinetics, Phantom Scalar Fields, Cosmological Acceleration, Computer Modelling.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

On the basis of developed earlier one of Authors of the kinetic theory of the macroscopical description of plasma with interpartial scalar interaction designs dynamic cosmological models. By means of methods of numerical modelling in an applied mathematical package numerical models of cosmological evolution are constructed and analysed at change of parametres of plasma and scalar interaction over a wide range.

REFERENCES

1. Yu.G. Ignat'ev. *Spase, Time and Fundamental Interaction*. – No. 1 – 2014. – p. 47–69.
2. Yu.G. Ignatyev and D.Yu. Ignatyev. *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 20, No 4, 2014.
3. Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 20, No 4, 2014.
4. Yu.G. Ignat'ev, *Russian Physics Journal*, **26**, No 12, 9 (1983).
5. N.N. Lebedev. *Special Functions and its Applications*. Moscow: GIFML. – 1963 (in Russian).
6. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov, *Grav. and Cosmol.*, **17**, 71 (2011); arXiv:1011.5774[gr-qc].
7. Alexei A. Starobinsky. *Lectures on modern problems of cosmology*. Proceeding of International School on Gravitation and Cosmology «Gracos-2014». Edited by prof. Yu.G. Ignat'ev. – Russia, Kazan: Kazan Federal University. – 2014, p. 48–58.

Received 26.08.2014

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Agathonov Alexandre Alexeevich, Candidat of Physics and Mathematics, senior lecturer, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Ignatyev Dmitry Yur'evich, Candidat of Physics and Mathematics, post-doctor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatyev.id@gmail.com

Mikhailov Mikail Leonidovich, engineer, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: meschgan@mail.ru