

УДК 531.51, 531.9

*Р. В. Королев,¹ С. В. Сушков²***ТОЧНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ
В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ**

В работе рассматривается скалярно-тензорная теория гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля с кривизной. Лагранжиан теории содержит слагаемое вида $G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ и представляет собой частный случай общего лагранжиана Хорндески, приводящего к уравнениям движения второго порядка. В рамках рассматриваемой модели мы используем метод Ринальди для построения аналитических решений, описывающих сферически симметричные кротовые норы. Построенные кротовые норы имеют горловину, связывающую две асимптотические области с геометрией пространства анти-Де Ситтера с постоянной отрицательной кривизной.

Ключевые слова: лагранжиан Хорндески, неминимальная кинетическая связь, черная дыра, кротовая нора.

PACS: 04.20.Jb Exact solutions, 04.50.Kd Modified theories of gravity

Введение

Естественной модификацией общей теории относительности Эйнштейна являются модели, учитывающие возможную неминимальную связь материальных полей с кривизной пространства-времени. Исследования в этом направлении имеют длительную историю, причем наиболее интенсивно и полно изучены различные неминимальные обобщения скалярно-тензорных теорий гравитации, которые имеют многочисленные приложения к космологии.

Особый подход к построению модифицированных теорий гравитации представляют модели, учитывающие неминимальную связь между производными динамических величин материальных полей с кривизной пространства-времени. Наиболее общая скалярно-тензорная теория такого рода была построена в 70-х годах прошлого столетия в работе Хорндески [1]. Хорндески построил свою теорию, опираясь исключительно на математические аргументы, однако позже те же результаты были получены на основе более интуитивного подхода при исследовании так называемых галилеонов [2].

Простейший лагранжиан в теории Хорндески содержит слагаемое вида $G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$, которое обеспечивает неминимальную кинетическую связь скалярного поля с кривизной. Космологические приложения такой теории исследовались достаточно интенсивно в работах [3–7]. В частности, в наших работах [3–6] было показано, что неминимальная кинетическая связь обеспечивает существенно новый механизм инфляции. Менее исследована проблема о существовании черных дыр в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. Недавно Ринальди [8] построил класс частных точных решений, имеющих характерные особенности черных дыр, в частности, горизонт событий. Впоследствии метод Ринальди был использован в работах [9–12] для построения новых частных решений с горизонтами событий.

В нашей работе [13] были исследованы кротовые норы в теории гравитации с неминимальной кинетической связью. Используя численные методы, мы построили решения, описывающие асимптотически плоские кротовые норы. В данной работе мы используем метод Ринальди для построения частных точных решений, описывающих кротовые норы.

¹E-mail: korolyovrv@gmail.com

²E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

1. Действие и полевые уравнения

Рассмотрим действие в теории гравитации с неминимальной кинетической связью³

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{8\pi} - [\varepsilon g_{\mu\nu} + \eta G_{\mu\nu}] \phi'^{\mu} \phi'^{\nu} \right\}, \quad (1.1)$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика пространства-времени, $g = \det(g_{\mu\nu})$, R – скалярная кривизна, $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, ϕ – вещественное безмассовое скалярное поле, и η – параметр неминимальной кинетической связи с размерностью квадрата длины. Параметр ε принимает значения ± 1 . В случае $\varepsilon = 1$ мы имеем каноническое скалярное поле с положительной кинетической энергией, а в случае $\varepsilon = -1$ – фантомное скалярное поле с отрицательной кинетической энергией.

Варьируя действие (1.1) по метрике $g_{\mu\nu}$ и скалярному полю ϕ , мы получим следующие уравнения [3, 4]:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi [\varepsilon T_{\mu\nu} + \eta \Theta_{\mu\nu}], \quad (1.2a)$$

$$[\varepsilon g^{\mu\nu} + \eta G^{\mu\nu}] \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi = 0, \quad (1.2b)$$

где

$$T_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi R + 2 \nabla_{\alpha} \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^{\alpha} \\ & + \nabla^{\alpha} \phi \nabla^{\beta} \phi R_{\mu\alpha\nu\beta} + \nabla_{\mu} \nabla^{\alpha} \phi \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \phi \\ & - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi \square \phi - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 G_{\mu\nu} \\ & + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} \phi \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \phi + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - \nabla_{\alpha} \phi \nabla_{\beta} \phi R^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вследствие тождества $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$, уравнение (1.2a) приводит к дифференциальному следствию

$$\nabla^{\mu} [\varepsilon T_{\mu\nu}^{(\phi)} + \eta \Theta_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в (1.5), непосредственной проверкой можно убедиться, что дифференциальное следствие (1.5) эквивалентно уравнению (1.2b). Другими словами это означает, что уравнение (1.2b) является дифференциальным следствием системы (1.2a).

2. Статические сферически симметричные решения

Будем искать статические сферически симметричные решения уравнений (1.2). В предположении сферической симметрии скалярное поле является функцией радиальной координаты r , т.е. $\phi = \phi(r)$, и метрика пространства-времени может быть выбрана в следующем виде:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + g(r) dr^2 + \rho^2(r) d\Omega^2, \quad (2.1)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Отметим, что произвол в выборе радиальной координаты r позволяет дополнительно зафиксировать форму одной из метрических функций $f(r)$, $g(r)$ или $\rho(r)$, однако на данном этапе мы этого делать не будем. Теперь, используя выбранный анзац для скалярного поля и метрики, мы можем представить уравнения поля (1.2) в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{fg}}{g} \psi \left[\varepsilon \rho^2 + \eta \left(\frac{\rho \rho' f'}{fg} + \frac{\rho'^2}{g} - 1 \right) \right] = C_0, \quad (2.2a)$$

$$\rho \rho' \frac{f'}{f} = \frac{g(g - \rho'^2) - 4\pi \eta \psi^2 (g - 3\rho'^2) + 4\pi \varepsilon \rho^2 \psi^2 g}{g - 12\pi \eta \psi^2}, \quad (2.2b)$$

$$\frac{\rho \rho'}{2} \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) = \frac{g(g - \rho'^2 - \rho \rho'') + 4\pi \eta \psi^2 (2\rho'^2 + \rho \rho'') + 4\pi \eta \rho \rho' (\psi^2)'}{g - 12\pi \eta \psi^2}, \quad (2.2c)$$

где C_0 – константа интегрирования, и $\psi \equiv \varphi'$. Отметим, что уравнение (2.2a) представляет собой первый интеграл уравнения движения скалярного поля (1.2b).

³ В этой работе мы используем систему единиц $G = c = 1$ и следующие определения тензора кривизны и тензора Риччи: $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \dots$ и $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$.

Далее, следуя Ринальди [8], мы будем искать аналитические решения системы уравнений (2.2) в частном случае, полагая

$$C_0 = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае уравнение (2.2a) приводит к следующему соотношению:

$$\rho\rho' \frac{f'}{f} = g - \rho'^2 - \frac{\varepsilon\rho^2 g}{\eta}, \quad (2.4)$$

Отсюда следует выражение для функции $f(r)$:

$$f(r) = \frac{C_1}{\rho} \exp\left(-\int \frac{(\varepsilon\rho^2 - \eta)g}{\eta\rho\rho'} dr\right), \quad (2.5)$$

где C_1 – константа интегрирования. Из формулы (2.2b) с учетом соотношения (2.4) можно выразить ψ^2 :

$$\psi^2(r) = \frac{\varepsilon\rho^2 g}{8\pi\eta(\varepsilon\rho^2 - \eta)}. \quad (2.6)$$

Скалярная кривизна, вычисленная для метрики (2.1), имеет следующий вид:

$$R = \frac{2}{\rho^2} - \frac{2\rho'f'}{\rho g f} + \frac{2\rho'g'}{\rho g^2} - \frac{2\rho'^2}{\rho^2 g} - \frac{4\rho''}{\rho g} + \frac{f'^2}{2g f^2} - \frac{f''}{g f} + \frac{g'f'}{2g^2 f}. \quad (2.7)$$

Используя соотношение (2.4), можно исключить функцию $f(r)$ из выражения для R . В результате мы получим

$$R = \frac{2(\varepsilon\rho^2 + \eta)}{\eta\rho^2} - \frac{3\rho'}{2\rho g} \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{g'}{g}\right) - \frac{3\rho''}{\rho g} - \frac{g}{2\rho^2\rho'^2} - \frac{\varepsilon g(\varepsilon\rho^2 - 2\eta)}{2\eta^2\rho^2} + \frac{g'(\varepsilon\rho^2 - \eta)}{2\eta\rho\rho'g} - \frac{\rho''(\varepsilon\rho^2 - \eta)}{\eta\rho\rho'^2} \quad (2.8)$$

Формулы (2.5), (2.6) и (2.8) выражают функции $f(r)$, $\psi(r)$ и $R(r)$ через функцию $g(r)$. Уравнение для $g(r)$ можно получить исключая $f(r)$ и $\psi(r)$ из уравнения (2.2c) с помощью соотношений (2.4) и (2.6):

$$\rho\rho'(\varepsilon\rho^2 - 2\eta)\frac{g'}{g} - \left(\frac{1}{\eta}\rho^4 - 3\varepsilon\rho^2 + 2\eta\right)g + \rho'^2(3\varepsilon\rho^2 + 2\eta) - 2\rho\rho''(\varepsilon\rho^2 - 2\eta) - \frac{4\rho^4\rho'^2}{\varepsilon\rho^2 - \eta} = 0. \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения может быть найдено в аналитической форме для произвольной функции $\rho(r)$. В зависимости от знака произведения $\varepsilon\eta$ решение имеет следующий вид:

A. $\varepsilon\eta > 0$.

$$g(r) = \frac{\rho'^2(\rho^2 - 2l_\eta^2)^2}{(\rho^2 - l_\eta^2)^2 F(r)}, \quad (2.10)$$

$$F(r) = 3 - \frac{8m}{\rho} - \frac{\rho^2}{3l_\eta^2} + \frac{l_\eta}{\rho} \operatorname{arctanh} \frac{\rho}{l_\eta}, \quad (2.11)$$

B. $\varepsilon\eta < 0$.

$$g(r) = \frac{\rho'^2(\rho^2 + 2l_\eta^2)^2}{(\rho^2 + l_\eta^2)^2 F(r)}, \quad (2.12)$$

$$F(r) = 3 - \frac{8m}{\rho} + \frac{\rho^2}{3l_\eta^2} + \frac{l_\eta}{\rho} \operatorname{arctan} \frac{\rho}{l_\eta}, \quad (2.13)$$

Здесь m – константа интегрирования, и $l_\eta = |\varepsilon\eta|^{1/2}$ – характерный масштаб неминимальной кинетической связи.

Для заданной функции $\rho(r)$ формулы (2.10)-(2.13) вместе с (2.5) и (2.6) дают решение задачи по построению функций $g(r)$, $f(r)$ и $\psi(r)$. Ниже мы рассмотрим два специальных примера для $\rho(r)$.

3. Координаты кривизн: $\rho(r) = r$

Как было отмечено выше, произвол в выборе радиальной координаты r позволяет дополнительно зафиксировать форму одной из метрических функций. Сделаем следующий выбор:

$$\rho(r) = r. \quad (3.1)$$

Такой выбор соответствует координатам кривизн, так что $r > 0$ есть радиус кривизны сферы $r = \text{const}$.

Подставляя $\rho(r) = r$ в формулы (2.5), (2.6), (2.10)-(2.13) и вычисляя интеграл в формуле (2.5), мы получим искомые решения для $g(r)$, $f(r)$ и $\psi(r)$. Впервые решения в случае $\rho(r) = r$ были получены в работе Ринальди [8]. Ниже мы кратко обсудим эти решения отдельно в зависимости от знака произведения $\varepsilon\eta$.

А. $\varepsilon\eta > 0$. В этом случае решение имеет вид

$$f(r) = C_1 F(r), \quad (3.2)$$

$$g(r) = \frac{(r^2 - 2l_\eta^2)^2}{(r^2 - l_\eta^2)^2 F(r)}, \quad (3.3)$$

$$\psi^2(r) = \frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2} \frac{r^2 (r^2 - 2l_\eta^2)^2}{(r^2 - l_\eta^2)^3 F(r)}, \quad (3.4)$$

где C_1 – константа интегрирования и

$$F(r) = 3 - \frac{r^2}{3l_\eta^2} - \frac{8m}{r} + \frac{l_\eta}{r} \operatorname{arctanh} \frac{r}{l_\eta}. \quad (3.5)$$

В пределе $r \rightarrow 0$ решение (3.2) для функции $f(r)$ принимает асимптотический вид

$$f(r) \approx 4C_1 \left(1 - \frac{2m}{r}\right),$$

поэтому, сравнивая полученную асимптотику с решением Шварцшильда, удобно взять $C_1 = \frac{1}{4}$.

Отметим, что в выражения (3.2)-(3.4) входит функция $(l_\eta/r) \operatorname{arctanh} r/l_\eta$, которая определена на интервале $r \in (0, l_\eta)$. Для продолжения решения в область $r \in (l_\eta, \infty)$ следует воспользоваться тождеством

$$\frac{l_\eta}{r} \operatorname{arctanh} \frac{r}{l_\eta} = \frac{l_\eta}{2r} \ln \frac{l_\eta + r}{l_\eta - r},$$

и затем перейти к функции $\frac{l_\eta}{2r} \ln \left| \frac{l_\eta + r}{l_\eta - r} \right|$. При $r \rightarrow \infty$ асимптотика функции $f(r)$ с областью определения, расширенной на интервал (l_η, ∞) , имеет форму решения Де Ситтера:

$$f(r) \approx \frac{3}{4} - \frac{r^2}{12l_\eta^2}.$$

Также отметим, что в точке $r = l_\eta$ функция $\frac{l_\eta}{2r} \ln \left| \frac{l_\eta + r}{l_\eta - r} \right|$ имеет логарифмическую особенность, поэтому ее область определения состоит из двух несвязанных частей $\mathcal{R}_1 : 0 < r < l_\eta$ и $\mathcal{R}_2 : l_\eta < r < \infty$. В свою очередь это означает, что мы имеем два отдельных класса решений вида (3.2)-(3.4), определенных независимо друг от друга в областях \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 .

Далее, учтем тот факт, что мы рассматриваем *вещественное* скалярное поле, поэтому величина ψ^2 должна быть неотрицательной, т.е., $\psi^2 \geq 0$. С учетом этого требования из формулы (3.4) следуют дополнительные ограничения на область определения координаты r . В частности, необходимо отметить, что в каждой из областей \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 при фиксированном значении ε знак функции $\psi^2(r)$ определяется знаком $F(r)$ и меняется на противоположный там, где функция $F(r)$ меняет знак. Отсюда можно сделать вывод, что решение (3.2)-(3.4) нельзя интерпретировать как решение, описывающее черную дыру в теории гравитации с неминимальной кинетической связью.⁴

⁴Обсуждая эту проблему в работе [8], Ринальди высказал точку зрения, что скалярное поле ϕ следует рассматривать не как реальное материальное поле, а как дополнительную степень свободы, выраженную действительной величиной ψ^2 . Отметим, что подобная интерпретация возможна для теорий специального вида, действие которых содержит только производные скалярного поля $\phi_{,\mu}$ (см., например, (1.1)). В общем случае действие может содержать потенциальный член $V(\phi)$, члены, отвечающие за неминимальную связь скалярного поля с кривизной или другими материальными полями, члены с производными высших порядков и т.п. При этом указанная интерпретация становится неприменимой.

В. $\varepsilon\eta < 0$. В этом случае решение принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{4}F(r), \quad (3.6)$$

$$g(x) = \frac{(r^2 + 2l_\eta^2)^2}{(r^2 + l_\eta^2)^2 F(r)}, \quad (3.7)$$

$$\psi^2(r) = -\frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2} \frac{r^2(r^2 + 2l_\eta^2)^2}{(r^2 + l_\eta^2)^3 F(r)}, \quad (3.8)$$

где

$$F(r) = 3 + \frac{r^2}{3l_\eta^2} - \frac{8m}{r} + \frac{l_\eta}{r} \arctan \frac{r}{l_\eta}. \quad (3.9)$$

Теперь решение содержит функцию $\frac{l_\eta}{r} \arctan \frac{r}{l_\eta}$ и определено на интервале $r \in (0, \infty)$. В пределе $r \rightarrow 0$ функция $f(r)$ имеет асимптотику Шварцшильда: $f(r) \approx 1 - \frac{2m}{r}$, а в пределе $r \rightarrow \infty$ – асимптотику анти-Де Ситтера: $f(r) \approx \frac{3}{4} + \frac{r^2}{12l_\eta^2}$. Однако полученное решение нельзя рассматривать как аналог решения Шварцшильда-анти-Де Ситтера, поскольку в случае $m > 0$ функция $F(r)$ меняет знак в некоторой точке r_h на интервале $r \in (0, \infty)$, а значит величина ψ^2 становится отрицательной в одной из областей $(0, r_h)$ или (r_h, ∞) в зависимости от знака ε .

Некоторый интерес с физической точки зрения может представлять случай $m = 0$. В этом случае функция $F(r)$ всюду положительна и регулярна. Вблизи нуля метрические функции имеют асимптотики $f(r) = 1 + O(r^2)$ и $g(r) = 1 + O(r^2)$, а также $\psi^2(r) = \frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2} \frac{r^2}{l_\eta^2} (1 + O(r^2))$. Таким образом, при $\varepsilon = +1$ мы получаем статическую сферически симметричную конфигурацию с регулярным центром и асимптотикой анти-Де Ситтера на бесконечности.

4. Конфигурация кротовой норы: $\rho(r) = \sqrt{r^2 + a^2}$

В этом разделе мы рассмотрим статические сферически симметричные конфигурации с метрической функцией $\rho(r)$ следующего вида:

$$\rho(r) = \sqrt{r^2 + a^2}, \quad (4.1)$$

где $a > 0$ – параметр. При этом метрика пространства-времени (2.1) принимает вид

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + (r^2 + a^2)d\Omega^2. \quad (4.2)$$

В случае, когда $f(r)$ и $g(r)$ являются положительно определенными всюду регулярными функциями с областью определения $r \in (-\infty, \infty)$, метрика (4.2) описывает геометрию кротовой норы с горловиной $r = 0$; параметр a называется радиусом горловины.

Подставляя $\rho(r) = \sqrt{r^2 + a^2}$ в формулы (2.6), (2.10)-(2.13), мы получим решения для $g(r)$ и $\psi^2(r)$ в явном виде. Решение (2.5) для $f(r)$ содержит неопределенный интеграл, который в данном случае не выражается явно в терминах элементарных функций. Ниже мы рассмотрим эти решения отдельно в зависимости от знака произведения $\varepsilon\eta$.

А. $\varepsilon\eta > 0$. В этом случае решение для $g(r)$ дается формулами (2.10)-(2.11). Решение содержит функцию $(l_\eta/\sqrt{r^2 + a^2}) \operatorname{arctanh}(\sqrt{r^2 + a^2}/l_\eta)$, область определения которой находится из условия $\sqrt{r^2 + a^2}/l_\eta < 1$, т.е. $|r| < r_1 \equiv (l_\eta^2 - a^2)^{1/2}$. В точках $|r| = r_1$ функция $(l_\eta/\sqrt{r^2 + a^2}) \operatorname{arctanh}(\sqrt{r^2 + a^2}/l_\eta)$ логарифмически расходится. Соответственно, метрическая функция $g(r)$ имеет сингулярное поведение вблизи $|r| = r_1$, что делает полученное решение неинтересным с физической точки зрения.

В. $\varepsilon\eta < 0$. В этом случае, подставляя $\rho(r) = \sqrt{r^2 + a^2}$ в формулы (2.12)–(2.13) и (2.5), (2.6) мы получим следующие решения для метрических функций $g(r)$ и $f(r)$ и функции $\psi^2(r)$:

$$g(r) = \frac{r^2(r^2 + a^2 + 2l_\eta^2)^2}{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 + l_\eta^2)^2 F(r)}, \quad (4.3)$$

$$f(r) = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \exp \left[\int_0^r \frac{r(r^2 + a^2 + 2l_\eta^2)^2}{l_\eta^2(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 + l_\eta^2)^2 F(r)} dr \right], \quad (4.4)$$

$$\psi^2(r) = -\frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2} \frac{r^2(r^2 + a^2 + 2l_\eta^2)^2}{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 + l_\eta^2)^3 F(r)}, \quad (4.5)$$

где

$$F(r) = 3 - \frac{8m}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{r^2 + a^2}{3l_\eta^2} + \frac{l_\eta}{\sqrt{r^2 + a^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{l_\eta} \right), \quad (4.6)$$

и константа интегрирования $C_1 = a$ в выражении для $f(r)$ выбрана так, чтобы $f(0) = 1$. Функция $F(r)$ имеет минимум при $r = 0$, поэтому для ее положительной определенности достаточно потребовать $F(0) > 0$. Отсюда можно получить ограничение на верхнее значение параметра m :

$$2m < a \left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha^2}{12} + \frac{1}{4\alpha} \arctan \alpha \right), \quad (4.7)$$

где $\alpha \equiv a/l_\eta$ – безразмерный параметр, характеризующий соотношение двух характерных размеров – радиуса горловины кротовой норы a и масштаба неминимальной кинетической связи l_η . В частности, в случае $a \ll l_\eta$ мы имеем $2m < a$. Далее мы будем полагать, что величина m удовлетворяет условию (4.7), и, следовательно, $F(r)$ – положительно определенная функция, т.е. $F(r) > 0$.

Обсудим асимптотические свойства полученного решения. Вдали от горловины в пределе $|r| \rightarrow \infty$ метрические функции $g(r)$ и $f(r)$ имеют следующие асимптотики:

$$g(r) = 3 \frac{l_\eta^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad f(r) = A \frac{r^2}{l_\eta^2} + O(r^0), \quad (4.8)$$

где константа A зависит от параметров a , l_η и m и может быть определена лишь численно. Отметим, что полученные асимптотики соответствуют геометрии пространства анти-Де Ситтера с постоянной отрицательной кривизной.

В окрестности горловины $r = 0$ мы имеем

$$g(r) = B \frac{r^2}{l_\eta^2} + O(r^4), \quad f(r) = 1 + O(r^2), \quad (4.9)$$

где

$$B = \frac{(\alpha^2 + 2)^2}{\alpha^2(\alpha^2 + 1)^2 \left(3 + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{8m}{a} + \frac{1}{\alpha} \arctan \alpha \right)}.$$

Отметим, что в самой горловине $r = 0$ метрическая функция $g(r)$ обращается в ноль, т.е. $g(0) = 0$. Это означает, что в точке $r = 0$ имеется координатная особенность. Для ответа на вопрос, имеется ли в этой точке геометрическая сингулярность, следует вычислить инварианты кривизны для метрики (2.1). В этой работе мы ограничимся обсуждением скалярной кривизны, которая в этом нашем случае дана выражением (2.8). Подставляя решение (4.3) в (2.8) нетрудно убедиться в том, что вблизи горловины скалярная кривизна имеет регулярное поведение: $R(r) = R_0 + O(r^2)$, где конечная величина $R_0 = R(0)$ достаточно громоздко выражается через параметры a , l_η и m . Вдали от горловины в пределе $|r| \rightarrow \infty$ скалярная кривизна асимптотически стремится к постоянной отрицательной величине, т.е. $R \rightarrow R_\infty$, где

$$R_\infty = -\frac{5 + 3l_\eta^2}{2l_\eta^2}. \quad (4.10)$$

Здесь следует отметить, что асимптотическое значение R_∞ определяется только характерным масштабом неминимальной кинетической связи l_η и не зависит от a и m . Отметим также, что $R_\infty \rightarrow -\infty$ в пределе $l_\eta \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь решение (4.5) для $\psi^2(r)$. Так как $F(r) > 0$, то условие $\psi^2(r) \geq 0$ выполняется только для $\varepsilon = -1$.

Для иллюстрации проведенного выше анализа на рис. 1 приведены графики решений $g(r)$, $f(r)$ и скалярной кривизны $R(r)$.

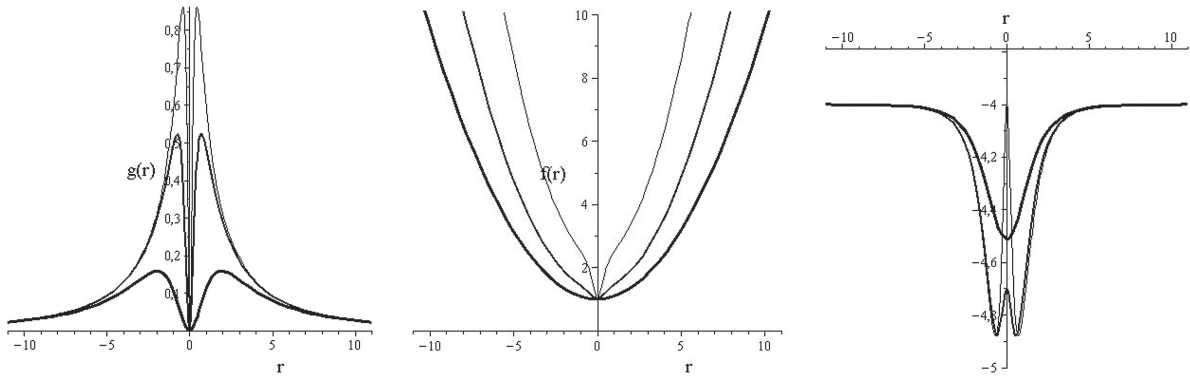


Рис. 1. Графики метрических функций $g(r)$, $f(r)$ и скалярной кривизны $R(r)$. Значения параметров $l_\eta = 1$, $m = 0.1$. Параметр a принимает значения $a = 0.3; 0.5; 1.5$ (соответствующие линии на графиках – от более тонкой к более толстой).

Заключение

В этой работе мы исследовали статические сферически симметричные решения в скалярно-тензорной теории гравитации с неминимальной кинетической связью скалярного поля с кривизной. Лагранжиан теории (1.1) содержит слагаемое вида $G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ и представляет собой частный случай общего лагранжиана Хорндески [1], приводящего к уравнениям движения второго порядка. Используя метод Ринальди [8], позволяющий находить частные сферически симметричные решения полевых уравнений (1.2) рассматриваемой теории, мы построили новый широкий класс решений, включающий в себя решения Ринальди как частный случай. Среди новых мы выделили и проанализировали решения, описывающие сферически симметричные кротовые норы. Анализ выявил ряд характерных свойств полученных решений. В частности, оказалось, что в горловине кротовой норы имеется специфическая координатная особенность, а именно, обращается в ноль метрическая функция при dr^2 . При этом в горловине отсутствует геометрическая сингулярность, поскольку все инварианты кривизны остаются регулярными. Также было показано, что горловина кротовой норы связывает две асимптотические области с геометрией пространства анти-Де Ситтера с постоянной отрицательной кривизной.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант №14-02-00598. Р.К. благодарит за поддержку фонд «Династия».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
2. A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 064036; C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084003; C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 064015;
3. S. V. Sushkov, *Phys. Rev. D* **80**, 103505 (2009);
4. E.N. Saridakis and S.V. Sushkov, *Phys. Rev. D* **81**, 083510 (2010);
5. S. Sushkov, *Phys. Rev. D* **85**, 123520 (2012);

6. M.A. Skugoreva, S.V. Sushkov, A.V. Toporensky, *Phys. Rev. D* **88**, 083539 (2013).
7. C. Gao, *JCAP* **06**, 023 (2010); L.N. Granda, W. Cardona, *JCAP* **1007**, 021 (2010); L. N. Granda, *Class. Quantum Grav.* **28**, 025006 (2011); L. N. Granda, *JCAP* **1104**, 016 (2011); L.N. Granda, E. Torrente-Lujan, J. J. Fernandez-Melgarejo, *Eur. Phys. J.* **C71**, 1704 (2011); L.N. Granda, arXiv:1109.1371; L.N. Granda, *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1250018 (2012); H. Mohseni Sadjadi, *Phys. Rev. D* **83**, 107301 (2011); A. Banijamali, B. Fazlpour, *Phys. Lett.* **B703**, 366 (2011); G. Gubitosi, E.V. Linder, *Phys. Lett.* **B703**, 113 (2011).
8. M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 084048.
9. A. Anabalon, A. Cisterna, J. Oliva, arXiv:1312.3597.
10. E. Babichev, C. Charmousis, arXiv:1312.3204.
11. M. Minamitsuji, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 064017.
12. A. Cisterna, C. Erices, arXiv:1401.4479.
13. S.V. Sushkov, R. Korolev, *Class. Quant. Grav.* **29(8)** (2012) 085008.

Поступила в редакцию 17.04.2014

Королев Роман Валерьевич, аспирант, кафедра теории относительности, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, Казань, ул. Кремлевская, д.18.
E-mail: korolyovrv@gmail.com

Сушков Сергей Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.
E-mail: sergey_sushkov@mail.ru

R. V. Korolev, S. V. Sushkov

Exact regular spherically symmetric solutions in the theory of gravity with nonminimal kinetic coupling

Keywords: Horndeski lagrangian, nonminimal kinetic coupling, black hole, wormhole.

PACS: 04.20.Jb Exact solutions, 04.50.Kd Modified theories of gravity

We consider a scalar-tensor theory of gravity with a scalar field possessing the nonminimal kinetic coupling with curvature. The Lagrangian of the theory contains the term $G^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ and represents the particular case of a general Horndeski Lagrangian resulting in second-order field equations. In this model we use the Rinaldi approach to construct new analytical solutions describing spherically symmetric wormholes. Wormholes found have a throat connecting two asymptotical regions with anti-De Sitter geometry.

Received 17.04.2014

Korolev Roman Valerievich, post-graduate student, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya street, 18, Kazan 420008, Russia .

E-mail: korolyovrv@gmail.com

Sushkov Sergey Vladimirovich, Professor, Department of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: sergey_sushkov@mail.ru