

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев<sup>1</sup>

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В УСКОРЕННОЙ ВСЕЛЕННОЙ НЕДОСТИЖИМО?

В статье рассмотрены неравновесные космологические сценарии в предположении восстановления скейлинга во взаимодействиях элементарных частиц при сверхвысоких энергиях выше унитарного предела. На основе точного решения уравнения энергобаланса получено строгое доказательство о принципиальной недостижимости термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной. Представлены и проанализированы результаты численного моделирования построенной ранее строгой математической модели процесса восстановления термодинамического равновесия в изначально неравновесной ультрарелятивистской космологической плазме во Вселенной с произвольным ускорением в предположении восстановления скейлинга во взаимодействиях элементарных частиц при энергиях выше унитарного предела. Найдены предельные параметры неравновесного распределения выживших реликтовых частиц. Выдвинуто предположение о принципиальной возможности детектирования «истинно реликтовых частиц», несущих информацию о самых первоначальных стадиях эволюции Вселенной.

**Ключевые слова:** ранняя Вселенная, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скейлинг, космические лучи, ранняя инфляция, позднее ускорение.

**PACS:** 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

### 1. Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы

Одним из главных положений стандартного космологического сценария (SCS)<sup>2</sup> является предположение о локальном термодинамическом равновесии (LTE) космологической плазмы на раннем этапе расширения Вселенной. Как известно, для установления LTE в статистической системе необходима малость эффективного времени между столкновениями частиц,  $\tau_{eff}$ , по сравнению с характерным временным масштабом эволюции системы. В космологической ситуации таким масштабом является возраст Вселенной, а более точно, – обратная величина логарифмической производной масштабного фактора,  $a(t)$ . Это приводит к следующему известному условию LTE в расширяющейся ультрарелятивистской космологической плазме<sup>3</sup>:

$$\frac{\dot{a}}{a} \tau_{eff} \ll 1, \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{n(t) \sigma_{tot}} \ll 1, \quad (1.1)$$

где  $a(t)$  – масштабный фактор,  $\dot{a} \equiv da/dt$ ,  $n(t)$  – плотность числа частиц,  $\sigma_{tot}$  – полное сечение рассеяния частиц в парных столкновениях.

#### 1.1. Кинематика четырехчастичных столкновений

Четырехчастичные реакции типа

$$a + b \rightleftharpoons c + d. \quad (1.2)$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами,  $s$  и  $t$  (см, например, [2] (1979)):

$$s = (p_a + p_b)^2 \equiv (p_a + p_b, p_a + p_b), \quad (1.3)$$

квадратом энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, и

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2. \quad (1.4)$$

релятивистским квадратом переданного импульса<sup>4</sup>. Далее  $(p, q) \equiv g_{ik} p^i q^k$  – скалярное произведение векторов  $p, q$  относительно метрики  $g$ ,  $a, b$  – индексы частиц,  $i, k = \overline{1, 4}$ ;  $\sqrt{s}$  – энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ).

<sup>1</sup>E-mail: ignatjev\_yu@rambler.ru

<sup>2</sup>см., например, [1] (2008)

<sup>3</sup>Мы выбираем планковскую систему единиц  $G = \hbar = c = 1$ .

<sup>4</sup>Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений:  $t$  – время в метрике Фридмана,  $s$  – ее интервал, одновременно  $t, s$  – кинематические инварианты. Эти обозначения являются стандартными и мы не сочли необходимым их менять.

При этом инвариантные амплитуды рассеяния  $F(s, t)$ , определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц,  $c$  и  $d$ , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов:

$$\overline{|M_{FJ}|^2} = |F(s, t)|^2, \quad (1.5)$$

где  $S_i$  – спины частиц. С помощью инвариантной амплитуды  $F(s, t)$  определяется полное сечение реакции (1.2):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt |F(s, t)|^2, \quad (1.6)$$

где  $m_i$  – массы покоя частиц,  $\lambda$  – функция треугольника:

$$\lambda^2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc,$$

и

$$t_{min}^{max} = \frac{4}{s} [(m_c^2 - m_a^2 + m_b^2 - m_d^2)^2 - (\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda'})^2],$$

где для сокращения приняты обозначения:

$$\lambda = \lambda(s, m_a^2, m_b^2); \quad \lambda' = \lambda(s, m_c^2, m_d^2).$$

В ультррелятивистском пределе

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b); \quad \lambda \rightarrow s^2;$$

$$t_{min} \rightarrow -s; \quad t_{max} \rightarrow 0; \quad \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty,$$

и формула (1.6) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s} : \quad (1.8)$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (1.9)$$

Таким образом, полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта  $s$  - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s). \quad (1.10)$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

### 1.2. Влияние зависимости $\sigma(s)$ на процесс восстановления LTE

В пространственно-плоской метрике Фридмана<sup>5</sup>, которая будет рассматриваться в статье,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.11)$$

интегралом движения является *конформный импульс* (см., например, [3] (1982))

$$\tilde{p} = a(t)p = \text{const}, \quad (1.12)$$

где  $p = \sqrt{-g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta}$  – физический трехмерный импульс ( $\alpha, \beta = \overline{1, 3}$ ),  $a$  – масштабный фактор. Таким образом, для ультррелятивистских частиц

$$s \sim p^2 \sim a^{-2}. \quad (1.13)$$

<sup>5</sup> как, впрочем, и для любой другой метрики Фридмана

Предполагая степенную зависимость полного сечения рассеяния частиц от  $s$

$$\sigma_{tot} \sim s^\nu \quad (1.14)$$

и *баротропическое* суммарное уравнение состояния материи  $p = \varkappa \varepsilon$ , где  $p$  – суммарное давление<sup>6</sup>,  $\varepsilon$  – суммарная плотность энергии,  $\varkappa$  – коэффициент *баротропы*, при условии сохранения полного числа частиц  $n(t)a^3(t) = \text{const}$  придем к следующему выводу [4] (1986).

**Утверждение 1** При выполнении условия

$$4\nu + 3(1 - \varkappa) > 0; \quad (\varkappa \neq -1), \quad (1.15)$$

*LTE* поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\nu > -\frac{3}{4}(1 - \varkappa) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (1.16)$$

а при выполнении обратного к (1.16) условия *LTE* нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних  $t > t_0$ .

В частности,

1<sup>0</sup>. в случае ультрарелятивистского уравнения состояния  $\varkappa = 1/3$  получим из (1.16) условие существования *LTE* на ранних стадиях расширения [4] —

$$\nu > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad p = \frac{1}{3}\varepsilon; \quad (1.17)$$

2<sup>0</sup>. в случае предельно жесткого уравнения состояния  $\varkappa = 1$  условие поддержания *LTP* на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию —

$$\nu > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon) \quad (1.18)$$

(отсюда следует, что при постоянном сечении рассеяния  $\nu = 0$  в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия *LTE* [4], — на этой стадии расширения во Вселенной *LTE* существует либо во все времена, либо всегда отсутствует);

3<sup>0</sup>. в случае инфляции  $\varkappa = -1$  при выполнении условия

$$\nu > -\frac{3}{2} \quad (1.19)$$

*LTE* поддерживается на ранних стадиях ( $t < t_0$ ) и нарушается на поздних ( $t > t_0$ ). Последнее, разумеется, верно при сохранении полного числа частиц на инфляционной стадии расширения.

## 2. Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния

### 2.1. Унитарность и унитарный предел

Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд  $F(s, t)$  в пределе (1.7). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями  $\sqrt{s}$  порядка нескольких Тев. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий порядка  $10^{11} \div 10^{16}$  Тев. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории  $S$ -матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность  $S$ -матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [5]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (2.1)$$

<sup>6</sup>в отличие от импульса,  $p$ , давление выделено прямым римским шрифтом,  $p$ .

при значениях  $s$  выше унитарного предела, т.е., при условии (1.7), если под  $m_i$  понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (1.9) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (2.2)$$

Понятие *унитарного предела* впервые было введено Л.Д. Ландау в 1940 г. применительно к векторным мезонам [6]. Следуя этой работе, под энергией унитарного предела в дальнейшем будем понимать такую критическую энергию, выше которой прекращается рост эффективного сечения взаимодействия и поведение сечения взаимодействия подчиняется условию унитарности. Например, для стандартного  $\nu e$  – рассеяния энергия унитарного предела  $E_u = \sqrt{s_u}$  составляет (см., например, [5])  $\sqrt{\sqrt{2}\pi/G} \approx 600 \text{ GeV}$ , где  $G$  – константа электрослабого взаимодействия.

### 2.2. Асимптотическое поведение сечений рассеяния частиц в области сверхвысоких энергий

На основе аксиоматической теории  $S$  – матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (2.3)$$

где  $C_1, C_2$  – неизвестные константы. Верхний предел (2.3) был установлен в работах [7] (1961), [8] (1963), [9] (1966), нижний – в [10] (1964), [11] (1965)б см. также обзор в книге [12] (1967). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния [12]:

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (2.4)$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (2.5)$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (1.7) должны быть функциями лишь переменной  $x = -t/s$ , т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (2.6)$$

Но тогда вследствие (1.9)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s} \quad (2.7)$$

— полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (2.7) лежит строго посредине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (2.3). Кроме того при выполнении (2.7) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы (2.1) и (2.2).

### 2.3. Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела  $s \rightarrow \infty$ . Возникает вопрос о значении константы в формуле (2.7) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть  $m$  – масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку  $\sqrt{s}$  – энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение  $\sqrt{s}$  для четырехчастичных реакций с частицами массы  $m$  равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (2.8)$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии  $E_{pl} = m_{pl} = 1$ , то при  $s \sim 1$  все четырехчастичные взаимодействия должны описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (2.9)$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (2.10)$$

– планковское значение кинематического инварианта  $s$ , соответствующее двум сталкивающимся планкеонам массой  $m_{pl}$  и комптоновского масштаба  $l_{pl}$ :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} (= 1). \quad (2.11)$$

Однако, для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$  ( $m_e$  – масса электрона,  $\sigma_T$  – томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при  $s \sim 4m_e^2$ , оно должно падать обратно пропорционально  $s$ , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (ACS), впервые предложенное в работах [13], [4], (см. также [14]):

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi\beta}{sL(s)}, \quad (2.12)$$

где  $\beta \sim 1$ ,  $L(s)$  – логарифмический фактор:

$$L(s) = 1 + \ln^2\left(1 + \frac{s_0}{s}\right) > 1, \quad (2.13)$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта  $s$  –

$$\frac{dL}{ds} < 0,$$

а  $s_0 = 4$  – квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$L(s_0) \simeq 1, \quad (2.14)$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при  $s = m_e^2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{L(m_e^2)}} \approx \frac{1}{102} \simeq \alpha \approx \frac{1}{137}, \quad (2.15)$$

где  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры.

Соотношение (2.15) позволяет рассматривать величину  $1/\sqrt{L(s)}$  как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия, что, в свою очередь, реализует идеологию бегущих констант взаимодействия стандартных теорий фундаментальных взаимодействий типа  $SU(5)$ .

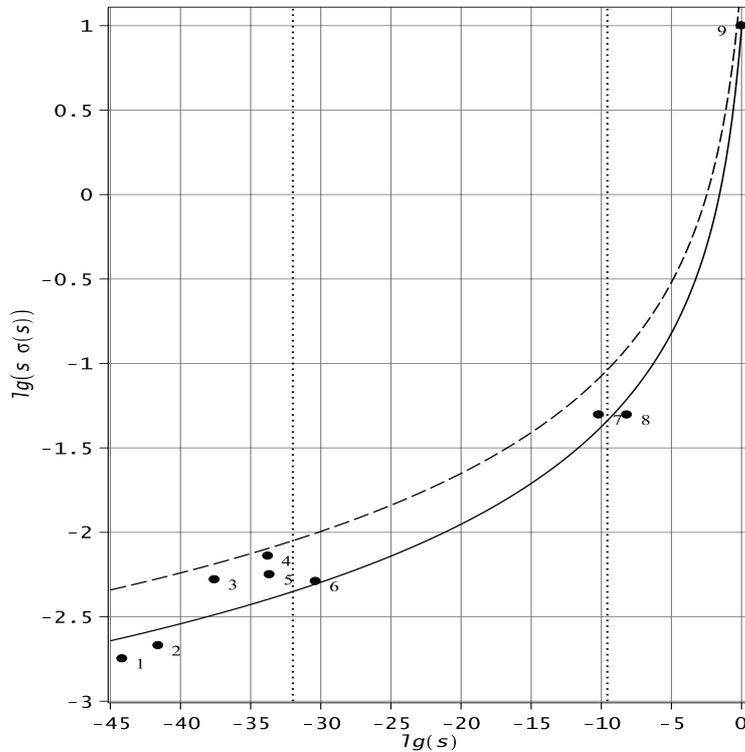
Введенное формулой (2.12), сечение рассеяния  $\sigma_0$ , ACS, обладает рядом замечательных свойств (см. также Figure 1):

- 1°. ACS образовано лишь из фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ ;
- 2°. ACS ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (2.3), установленных с помощью асимптотической теории  $S$ -матрицы;
- 3°. ACS с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
- 4°. ACS с удивительной точностью совпадает на соответствующих масштабах энергии с сечениями всех известных фундаментальных процессов, начиная от электромагнитных и кончая гравитационными, на огромном диапазоне значений энергии (от  $m_e$  до  $10^{22}m_e$ ) – при этом значения первого кинематического инварианта изменяется на 44 порядка! (см. Figure 1).

В предыдущих работах Автора были приведены достаточно убедительные аргументы в пользу скейлингового поведения сечений рассеяния четырехчастичных реакций в области *энергий выше унитарного предела*. В частности, было проведено сравнение сечений рассеяния некоторых

конкретных четырех-частичных реакций с величиной асимптотического сечения рассеяния в соответствующих областях энергий. Тем не менее, при обсуждении этого вопроса со специалистами в квантовой теории поля часто приходится сталкиваться с неприятием гипотезы о скейлинговом характере фундаментальных взаимодействий в области сверхвысоких энергий. Согласно пониманию Автора это неприятие вызвано, во-первых, ограниченным диапазоном энергий при вычислении сечений рассеяния конкретных процессов, а, во-вторых, «взглядом снизу» в смысле энергий ниже унитарного предела гна процедуры квантовых вычислений сечений рассеяния. В конце-концов, если мы являемся гравитационистами и верим в идею объединения всех взаимодействий, мы должны, во-первых, признать, хотя-бы, простой факт, что на планковских масштабах энергий, сечения взаимодействия должны иметь планковскую величину, а, во-вторых, поставить вопрос, каким образом сечение этого единого фундаментального взаимодействия может упасть на 44 порядка, начиная с масштабов электромагнитных взаимодействий. Единственный закон, который может дать это соответствие – это  $\sigma \sim 1/s$ .

Тем не менее, для устранения этого «мелкомасштабного недоразумения» мы приведем в этой статье сравнение величин асимптотического сечения рассеяния (2.12) с сечениями рассеяния хорошо изученных квантовых четырехчастичных процессов в графическом формате (Рис. 1).



**Рис. 1.** Сравнение универсального сечения рассеяния (2.12) при факторе  $\beta = 1$  с известными сечениями фундаментальных процессов — жирная линия. Пунктирная линия соответствует графику универсального сечения рассеяния при факторе  $\beta = 2$ . На оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма первого кинематического инварианта,  $\lg s$ , в планковских единицах; по оси ординат отложены значения десятичного логарифма безразмерного инварианта,  $\lg(s \sigma(s))$ . 1 — томпсоновское рассеяние, 2 — комптоновское рассеяние на электронах при  $E_{SCM} = 10 \text{ MeV}$ , 3 — комптоновское рассеяние электронов при  $E_{SCM} = 1 \text{ GeV}$ , 4 — электрослабое взаимодействие с участием  $W$  — бозонов, 5 — с участием  $Z$  — бозонов, 6 —  $H$ -бозонов при энергии порядка  $7 \text{ TeV}$  ( $\sigma \sim 10 \text{ fb}$ ); 7 —  $SU(5)$  — взаимодействие при массе сверхтяжелых  $X$ -бозонов  $10^{15} \text{ GeV}$ , 8 —  $10^{14} \text{ GeV}$ , 9 — гравитационное взаимодействие на планковских масштабах. Вертикальные пунктирные линии соответствуют значениям энергии унитарного предела для  $SU(2) \times SU(1)$  — взаимодействий,  $E_u = 617 \text{ GeV}$ , и  $SU(5)$  — взаимодействий,  $E_u \sim 10^{14} \text{ GeV}$ .

Эти замечательные качества ACS, вряд-ли, могут быть случайными и позволяют нам в дальнейшем применять ACS в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

### 3. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

#### 3.1. Упрощение релятивистского интеграла столкновений

Процесс установления термодинамического равновесия описывается релятивистскими кинетическими уравнениями. В работе [3] (1982) показано, что релятивистские кинетические уравнения конформно инвариантны в ультрарелятивистском пределе при наличии скейлинга взаимодействий. Этот факт является основой для утверждения о том, что, по крайней мере, в ультрарелятивистской Вселенной, LTE могло нарушаться. Итак, будем рассматривать однородные изотропные распределения частиц в метрике Фридмана (1.11). Такие распределения описываются функциями:

$$f_a(x^i, p^k) = f_a(t, p). \quad (3.1)$$

Релятивистские кинетические уравнения относительно однородных изотропных распределений (3.1) принимают вид (подробности см. в [15], [16], [17], [18], [19]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(t, p), \quad (3.2)$$

где  $J_{ab}(t, p)$  – интеграл четырехчастичных реакций [19], [17]:

$$J_{ab}(t, p) = (2\pi)^4 \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \times [(1 \pm f_a)(1 \pm f_b) |f_c f_d \overline{M_{cd \rightarrow ab}}|^2 - (1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b \overline{M_{ab \rightarrow cd}}|^2], \quad (3.3)$$

знаки  $\pm$  соответствуют бозонам (+) и фермионам (–),  $M_{i \rightarrow f}$  – инвариантные амплитуды рассеяния (черта означает усреднение по состояниям поляризации частиц),  $d\pi_a$  – нормированный элемент объема импульсного пространства  $a$ -той частицы:

$$d\pi_a = \sqrt{-g} \frac{\rho_a dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^3 p_4}, \quad (3.4)$$

$\rho_a$  – фактор вырождения.

Упростим интеграл четырехчастичных взаимодействий (3.4), используя свойства изотропии распределений  $f_a(t, p)$ . Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным переменным перейдем в локальную систему центра масс, в которой интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве в ультрарелятивистском пределе (1.7) найдем ([4], [20]):

$$J_{ab}(p) = -\frac{2S_b + 1}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi \{ f_a(p) f_b(q) [1 \pm f_c(p - \Delta)] [1 \pm f_d(q + \Delta)] - f_c(p - \Delta) f_d(q + \Delta) [1 \pm f_a(p)] [1 \pm f_b(q)] \}, \quad (3.5)$$

где  $x = -t/s$  безразмерная переменная (1.8), и

$$\Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}. \quad (3.6)$$

#### 3.2. Релятивистские кинетические уравнения в терминах конформно соответствующего пространства

Учитывая тот факт, что переменная  $\tilde{p}$  (1.12) является интегралом движения в метрике Фридмана и при этом для любой функции  $\Psi(t, p)$  имеет место соотношение [15]:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \tilde{p})}{\partial t}, \quad (3.7)$$

преобразуем кинетические уравнения для однородных изотропных распределений к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} = \frac{a}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(\eta, p), \quad (3.8)$$

куда необходимо подставить  $p = \tilde{p}/a$ .

Заметим, что с другой стороны переход к переменной (1.12),  $\tilde{p}$ , фактически является конформным преобразованием к однородному статическому пространству

$$ds^2 = a^2 ds_0^2 = a^2(d\eta^2 - dl^2),$$

при котором физическая компонента импульса,  $p$ , преобразуется по закону:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}. \quad (3.9)$$

Таким образом, импульсная переменная (1.12),  $\tilde{p}$ , есть абсолютная величина физического импульса в конформно соответствующем статическом пространстве постоянной кривизны<sup>7</sup>, а  $\eta$  – временная переменная в этом пространстве.

Плотности числа частиц,  $n(\eta)$ , и плотности их энергии,  $\varepsilon(\eta)$ , относительно изотропного распределения частиц,  $f(\eta, p)$  определяются формулами:

$$n(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 f(\eta, p) dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (3.10)$$

$$\varepsilon(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2/a^2} f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \quad (3.11)$$

В связи с этим удобно ввести конформные плотности числа частиц,  $\tilde{n}(\eta)$ , а для ультрарелятивистских частиц – и плотности их энергии,  $\tilde{\varepsilon}(\eta)$ :

$$\tilde{n}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (3.12)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp \approx \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^3 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \quad (3.13)$$

Тогда имеют место два соотношения:

$$\tilde{n}(\eta) = n(\eta) a^3(\eta); \quad (3.14)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) \approx \varepsilon(\eta) a^4(\eta); \quad (p/m \rightarrow \infty), \quad (3.15)$$

из которых первое выполняется строго, а второе, – асимптотически, в ультрарелятивистском пределе.

### 3.3. Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц,  $n_e(t)$ , находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц,  $n_{ne}(t)$ , –

$$n_{ne}(t) \ll n_e(t) \quad (3.16)$$

тепловое равновесие нарушено (см. Рис. 2). Причем в дальнейшем в этой статье мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии,

<sup>7</sup> В рассматриваемом случае – в пространстве Минковского

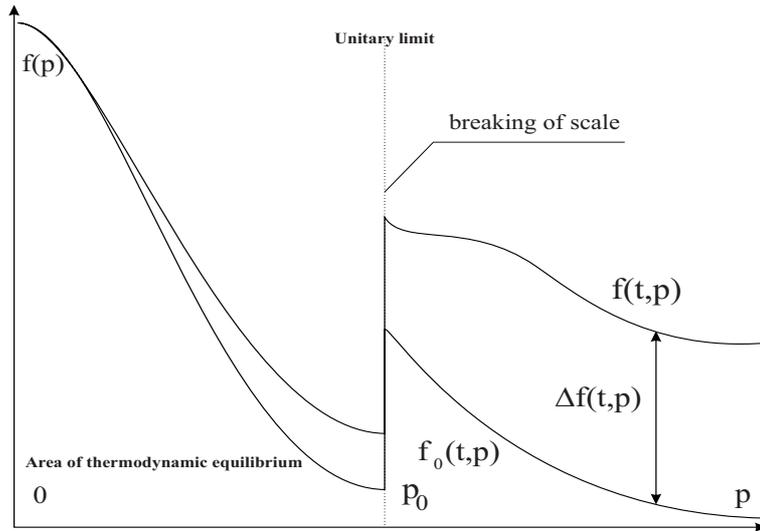
меньших некоторого унитарного предела,  $p = p_0$  (или  $T = T_0$ ), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = [\exp(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}) \pm 1]^{-1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

где  $\mu_a(t)$  – химические потенциалы,  $T(t)$  – температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области  $p > p_0$  может наблюдаться аномально большое по сравнению с равновесным число частиц, но при этом малое (см. (3.16)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения  $f_a(p)$  к равновесному  $f_a^0(p)$ . Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения  $f(t=0, p)$  решалась ранее в [13], [4], [20]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему – равновесную с распределением  $f_a^0(t, p)$ , и неравновесную, *сверхтепловую*, с распределением  $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$ , причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна. Исследуем интеграл столкновений (3.5) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (3.18)$$



**Рис. 2.** Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

Вследствие неравенства (3.17) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов,  $p' = p - \Delta$ , либо  $q' = q + \Delta$  должно лежать в тепловой области, второго – в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (3.5) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым лишь в асимптотически малых областях изменения переменных  $x$  и  $\varphi$ :  $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$ . Статистические факторы вида  $[1 \pm f_a(p')]$  в первом члене интеграла (3.5) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (3.5) можно записать в виде [20]:

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p)|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2. \quad (3.19)$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (3.5), получим из (3.19):

$$J_{ab\leftrightarrow cd}(p)|_{p\geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot}^s(s) ds. \quad (3.20)$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для  $\sigma_{tot}$  в форме ACS, (2.12), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$J_a(p)|_{p\geq p_0} = -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{4(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \int_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{dq}{L(\bar{s})}, \quad (3.21)$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{2} p q^4,$$

$\nu_{ab}$  – число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта  $a$ .

Вычислим значения интеграла (3.21) в предельных случаях.

#### 3.4. Выражения для равновесных плотностей

Выпишем выражения для макроскопических плотностей относительно равновесных распределений  $f_a^0(p)$  (3.10), (3.11),  $\bar{n}$ , и энергии,  $\bar{\varepsilon}$ . В случае газа безмассовых частиц ( $\mu = 0$ ) получим (см., например, [21]):

$$\bar{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (3.22)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (3.23)$$

где  $\rho$  – число независимых поляризаций (спина) частицы ( $\rho = 2$  – для фотонов и безмассовых нейтрино),  $g_a$  – статистический фактор:

$$\begin{aligned} g_n &= g_e = 1 && \text{for Bose particles;} \\ g_n &= 3/4, g_e = 7/8 && \text{for Fermi particles.} \end{aligned} \quad (3.24)$$

знак “+” соответствует фермионам, “-” – бозонам,  $\zeta(x)$  –  $\zeta$  есть функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \bar{\varepsilon}_a = N \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (3.25)$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (3.26)$$

- эффективное число типов частиц ( $S$  – спин частицы)<sup>8</sup>; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Введем числа типов бозонов и фермионов,  $N_B$  и  $N_F$ :

$$N_B = \frac{1}{2} \sum_B (2S + 1); \quad N_F = \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1). \quad (3.27)$$

Тогда:

$$N = N_B + \frac{7}{8} N_F. \quad (3.28)$$

<sup>8</sup> В полевых моделях взаимодействий типа SU(5)  $N \sim 100 \div 200$ .

Для газа нерелятивистских частиц:

$$n_a^0 \approx \delta n_\gamma^0 = \delta \frac{2T^3}{\pi^2} \zeta(3), \quad \varepsilon_a \approx m_a n_a, \quad (3.29)$$

где  $n_\gamma^0$  – плотность числа реликтовых фотонов,

$$\delta \sim 10^{-10}. \quad (3.30)$$

Следует отметить, что возможная относительная средняя концентрация частиц небарионной природы темной материи,  $\delta_{nb}$ , при ее плотности порядка 25% от критической плотности,  $\rho_c \approx 0.9 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ , и ожидаемой минимальной массе частиц порядка 50 Gev еще меньше  $1/\delta$  и составляет порядка  $0.5 \cdot 10^{-11}$ .

### 3.5. Рассеяние на нерелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  нерелятивистские, т.е.,  $q \ll m_b$ , то интеграл (3.21) сводится к выражению:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -32\pi^2 \Delta f_a(p) \sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 pm_b/2}, \quad (m_b > T). \quad (3.31)$$

### 3.6. Рассеяние на ультрарелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  являются ультрарелятивистскими, т.е.,  $m_b \ll T$ , причем их химический потенциал мал,  $-\mu_b \ll T$ , то вычисляя интеграл (3.21) относительно равновесного распределения (3.17), найдем:

$$J_a(p)|_{p \geq p_0} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{N}T^2(t)}{1 + \ln^2 Tp/2} \Delta f_a(p), \quad (m_b \ll T, \mu_b \ll T), \quad (3.32)$$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S+1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S+1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

$N_B$  – число сортов равновесных бозонов,  $F$  – фермионов.

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$\frac{J_{non}}{J_{ultra}} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (3.33)$$

- отношение вкладов мало при  $T \ll 10^9 m_b$  и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

## 4. Построение и решение уравнения энергобаланса

Построим строгую самосогласованную математическую модель восстановления теплового равновесия в расширяющейся Вселенной в условиях слабого нарушения равновесия в смысле малости числа неравновесных частиц по сравнению с числом равновесных частиц (3.16). Заметим, что при этом энергия, заключенная в неравновесном высокоэнергетическом «хвосте» распределения,  $\Delta f_a(t, p)$ , может быть большой и даже значительно превышать энергию равновесной компоненты космологической плазмы. Выпишем сначала основные соотношения, определяющие динамику космологической плазмы. Заметим также, что основные положения теории восстановления термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением, основанные на *методе уравнения энергобаланса*, были разработаны в предыдущих статьях Автора [22] [23], [24].

#### 4.1. Модель материи

Как известно (см., например, [25]), уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (4.1)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (4.2)$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (4.3)$$

где  $\varepsilon_p, p_p$  – плотность энергии и давление космологической плазмы,  $\varepsilon_s, p_s$  – плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

*Инвариантное ускорение Вселенной*

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (4.4)$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропии* материи,  $\varkappa \equiv p/\varepsilon$ , соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (4.5)$$

Таким образом, на стадии ускорения ( $t > t_1$ ):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (4.6)$$

До этого момента  $\varkappa \in [1/3, -1/3]$ . Согласно (4.1) – (4.2) масштабный фактор и суммарная плотность энергии *при заданном постоянном коэффициенте баротропии* меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (4.7)$$

Используя связь (4.5), перепишем соотношения (4.7) в более удобном для нас виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (4.8)$$

Заметим, что при любых значениях инвариантного ускорения  $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$  плотность энергии пропорциональна  $t^{-2}$ .

#### 4.2. Основные предположения модели

Примем следующие предположения в нашей модели:

1°. Скейлинговый характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий и унификация всех межчастичных взаимодействий на основе фундаментальных постоянных  $G, \hbar, c$  при энергиях выше унитарного предела, что приводит к формуле универсального асимптотического сечения рассеяния (2.12);

2°. *Минимальность связи фундаментальных макроскопических полей с космологической плазмой.* Это автоматически означает, что закон сохранения энергии (4.8) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (4.9)$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (4.10)$$

3°. *Ультррелятивистское уравнение состояния космологической плазмы* на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (4.10) \Rightarrow \varepsilon_p a^4 = \text{Const}. \quad (4.11)$$

4°. *Ультррелятивистское начало Вселенной:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (4.12)$$

### 4.3. Баланс энергии космологической плазмы

Основой развиваемой здесь теории является *уравнение энергодобавки* космологической плазмы, являющееся, фактически, законом сохранения ее энергии. Для случая суммарного ультрарелятивистского состояния материи эта теория была построена автором в работах [4], [20]. Здесь мы обобщим и детализируем результаты этой теории на случай произвольного суммарного уравнения состояния материи. Из (4.10) с учетом (4.11) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (4.13)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_p$  — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (4.8) на начальной ультрарелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (4.14)$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультрарелятивистской компонентной материи, —

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (4.15)$$

Введем далее температуру  $T_0(t)$  космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени  $t$  вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы описывается формулой (3.25) с  $N = N_0$  — эффективным числом типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T_0$ . Отсюда с учетом (4.15) получим закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left( \frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.16)$$

Относительно величины  $N_0$  — *эффективного числа типов частиц*, находящихся в термодинамическом равновесии, мы будем полагать, что  $N_0(t)$  — медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (4.17)$$

Пусть теперь  $T(t)$  — истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а  $\Delta f_a(p, t)$  — функция распределения « $a$ »-го сорта неравновесных частиц плазмы. Найдем плотности энергии равновесной,  $\varepsilon_e$ , и неравновесной,  $\varepsilon_{ne}$ , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N\pi^2}{15} T^4(t); \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (4.19)$$

где  $S$  — спин частиц;  $N(t)$  — эффективное число типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T(t)$ . Выражая далее с помощью (4.16) масштабный фактор через температуру  $T_0(t)$  и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную  $\tilde{p}$ :<sup>9</sup>

$$p = \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (4.20)$$

получим для (4.19):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (4.21)$$

Далее, из (4.16) и (4.18) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (4.22)$$

<sup>9</sup>В отличие от импульсной переменной,  $p$ , давление обозначается римским шрифтом, — р.

где введена безразмерная функция,  $y(t)$  – *относительная температура* [20]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (4.23)$$

Из (4.22) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (4.24)$$

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (4.15) с помощью соотношений (4.19) и (4.22) можно переписать в виде:

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (4.25)$$

Соотношение (4.25) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели –  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$ . Заметим, что в предыдущих статьях автора это основное соотношение математической модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического времени уравнение энергобаланса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

## 5. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

### 5.1. Решение кинетического уравнения

Уравнение энергобаланса (4.25), в свою очередь, определяется решением кинетического уравнения относительного неравновесного распределения  $\Delta f(t, p)$ . Используя здесь соотношение (4.20), приведем кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц (3.8) с интегралом столкновений (3.32) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = - \frac{8\pi N}{3\tilde{p}L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N^{1/4})} \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} T^2(t) a(t) \Delta f_a. \quad (5.1)$$

Решая (5.1), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp \left[ - \frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (5.2)$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (5.3)$$

### 5.2. Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем *среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени*,  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ , –

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (5.4)$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную,  $\rho$ , –

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (5.5)$$

так что

$$\langle \rho \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\langle \tilde{p} \rangle_0 \tilde{n}(0)} \equiv 1 \Rightarrow \langle \rho \rangle_0 = \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \quad (5.6)$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна быть больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц, таким образом согласно (4.20), (5.4) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (5.7)$$

Фактически величина  $\langle \tilde{p} \rangle_0$  является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели, – физический смысл этого безразмерного параметра – отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени<sup>10</sup>. В отличие от конформной импульсной переменной  $\tilde{p}$  среднее значение безразмерной конформной импульсной переменной  $\rho$  в начальном распределении тождественно равно 1.

Преобразуем выражение в экспоненте (5.2), переходя к безразмерным переменным  $y, \rho$ . Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора  $L$  от своих аргументов, а также убывающий характер подинтегральной функции в (5.2), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$L\left(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4}\right) \simeq L(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv L_0(t). \quad (5.8)$$

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (5.2) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp\left(-\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt\right), \quad (5.9)$$

где введено обозначение:

$$\xi \equiv \xi(t) = \left(\frac{5\pi}{18}\right)^{1/4} \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx 0.967 \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)}. \quad (5.10)$$

Вводя теперь новую *безразмерную временную переменную*,  $\tau$ , –

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (5.11)$$

такую, что:

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (5.12)$$

и новую *безразмерную функцию*,  $Z(\tau)$ , –

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (5.13)$$

приведем решение кинетического уравнения (5.9) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (5.14)$$

<sup>10</sup>Сами эти величины могут быть бесконечными, но их отношение конечно.

Исследуем *уравнение связи* (5.11) безразмерной временной переменной  $\tau$  и космологическим временем  $t$ . Полагая в (5.11) степенную зависимость масштабного фактора  $a(t)$  от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора  $\xi$ , получим:

$$a \sim t^\alpha \rightarrow \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, 0; \\ \tau \sim \ln t, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$ , а при  $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$ . Сравнивая соотношение (5.15) с соотношениями (4.5) – (4.8), приходим к следующему важному выводу:

$$\begin{aligned} \varkappa \geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \\ \varkappa < -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) &\Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (5.14) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной  $Z(\tau)$ , то соотношения (5.16) означают, что в ультрарелятивистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как в *ускоряющейся Вселенной термодинамическое равновесие никогда строго не достигается*.

### 5.3. Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (5.14) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (5.17)$$

Произведем тождественное преобразование с этим выражением, учитывая что согласно определению (4.24) и уравнению энергобаланса (4.25):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi} : \quad (5.18)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\tilde{\varepsilon}_{ne}^0} \varepsilon_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (5.19)$$

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной  $\rho$  (5.5) ввели новую *безразмерную функцию*  $\Phi(Z)$ :

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (5.20)$$

### 5.4. Решение и исследование уравнения энергобаланса

Вследствие определения (5.13) функция  $Z(\tau)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (5.21)$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (5.22)$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (5.23)$$

Таким образом, с учетом (5.19) – (5.21) уравнение энергобаланса (4.25) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции  $Z(\tau)$ :

$$y^4 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) = 1 \Rightarrow Z'^2 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) = 1, \quad (5.24)$$

решая которое с учетом соотношений (5.22) – (5.23), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(u)}} = \tau. \quad (5.25)$$

Согласно определению (5.20) функция  $\Phi(Z)$  неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (5.26)$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (5.27)$$

Вычисляя первую и вторую производную по  $Z$  от функции  $\Phi(Z)$ , дифференцируя соотношение (5.20) по  $Z$ , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (5.28)$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (5.29)$$

Вследствие (5.28) функция  $\Phi(Z)$  является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (5.27) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (5.30)$$

причем график функции  $\Phi(Z)$  вогнутый. Вследствие этих свойств функции  $\Phi(Z)$  уравнение  $\Phi(Z) = \Phi_0$  на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение  $Z = Z_0$ , т.е., отображение  $Y = \Phi(Z)$  на множестве неотрицательных чисел является биективным.

Далее, из соотношения (5.21) следует, что функция  $Z(\tau)$  является монотонно возрастающей на интервале  $\tau \in [0, \tau_\infty]$ . Дифференцируя соотношение (5.24) по  $\tau$  как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (5.31)$$

Отсюда вследствие положительности  $Z'$  (5.24) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (5.32)$$

Поэтому вследствие (5.28) и (4.23) – (4.24) получим из (5.32):

$$Z'' > 0, \quad (5.33)$$

т.е., график функции  $Z(\tau)$  также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (5.33):

$$y' > 0, \quad (5.34)$$

— т.е. функция  $y(\tau)$  (а вместе с ней и функция  $\sigma(\tau)$ ) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением  $y_0$  ( $\sigma_0$ ), а сверху — значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1]; \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (5.35)$$

Перечисленные свойства функций  $y(\tau)$ ,  $Z(\tau)$  и  $\Phi(Z)$  обеспечивают биективность цепочки отображений  $\tau \leftrightarrow y$ ,  $y \leftrightarrow Z$ ,  $Z \leftrightarrow \Phi$ . В итоге, каждому значению  $\Phi$  соответствует одно и только одно значение  $Z$  и одно и только одно значение  $\tau$ :  $\tau \leftrightarrow \Phi$ . Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$  с помощью уравнения энергобаланса (5.25):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (5.36)$$

Уравнения (5.25) и (5.36) являются параметрическим решением уравнения энергобаланса (5.24), а вышеперечисленные свойства функций  $\Phi(Z)$  и  $Z(\tau)$  обеспечивают единственность его решения. Согласно (5.20) функция  $\Phi(Z)$  полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц  $\Delta f_a^0(\rho)$ . Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (5.32) по  $\tau$  и учтем связь (5.21) между функциями  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$ :

$$Z''' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \Rightarrow y''y = -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2. \quad (5.37)$$

Таким образом, вследствие (5.29):

$$y'' < 0, \quad (5.38)$$

— т.е., график функции  $y(\tau)$ , а вместе с ним и  $\sigma(\tau)$ , является выпуклым. Далее, поскольку  $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$ , из (5.32) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (5.39)$$

— т.е., значение  $\sigma = 1$  достигается асимптотически при  $\tau \rightarrow \infty$ . Это позволяет нарисовать качественный график функции  $y(\tau)$  (Figure 3). Конечность безразмерного времени  $\tau_\infty$  приводит к установлению предельного значения функции  $y(\tau)$ :

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (5.40)$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (5.41)$$

Согласно (5.16) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

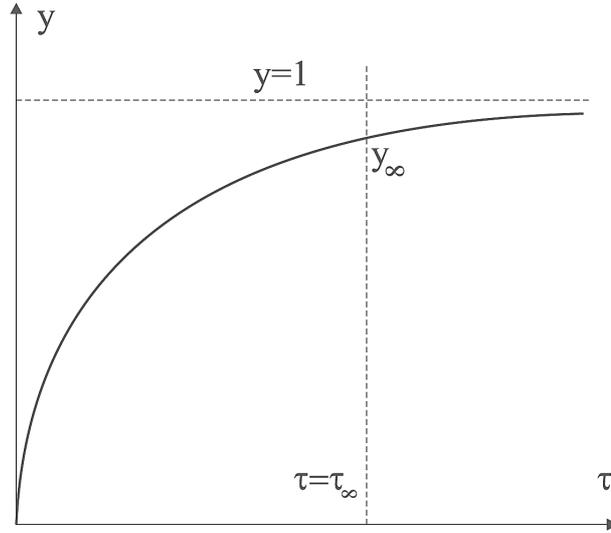


Рис. 3. Качественный вид графика функции  $y(\tau)$ .

## 6. Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Рассмотрим следующую простую модель материи, состоящей из двух компонент — минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния:

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (6.1)$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния (4.11). Тогда суммарный коэффициент баротропии и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \frac{1 - 3\delta}{1 + \delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1 - \delta}{1 + \delta}, \quad (6.2)$$

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (6.3)$$

Таким образом, при  $\delta = \text{Const}$  формулы (4.7) можно записать в следующем удобном виде [30]:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1+\delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (6.4)$$

Законы сохранения энергии (4.9) – (4.10) принимают вид:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Lambda^2}{8\pi}; \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.5)-(6.6) в уравнение (4.1) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Lambda} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.7)$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Lambda^2}. \quad (6.8)$$

В частности, при  $t_0 = 0$  для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{32\pi} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda}} \quad (6.9)$$

Вычисляя согласно (6.3), (6.5), (6.6) и (6.9) отношение  $\delta$ , найдем:

$$\delta(t) = \left( \frac{3}{16\pi\Lambda} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda} \right)^2. \quad (6.10)$$

Далее, согласно (6.3) можно вычислить эффективный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение (см. Рис. 4).

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра  $\Lambda$  можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения  $\kappa \rightarrow -1$ . Напомним, что космологическое время  $t$  измеряется в планковских единицах.

Таким образом, согласно (5.11) определим новую безразмерную временную переменную,  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\Lambda \langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (6.11)$$

где:

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \text{sh} t/2\Lambda}{1 + \text{sh} t/2\Lambda}; \quad (6.12)$$

$F(\varphi, k)$  – эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (6.13)$$

Таким образом:

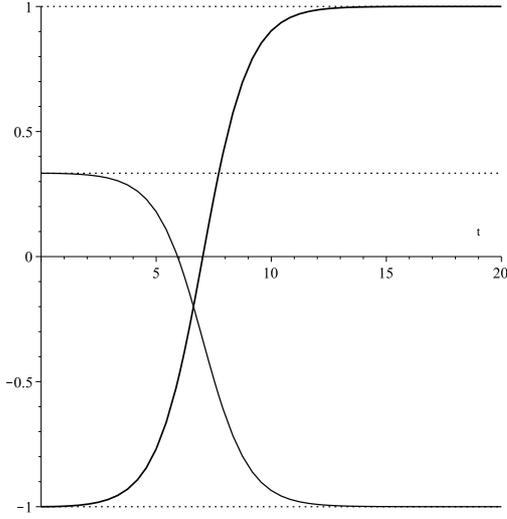
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{1}{\text{sh} \varphi} \frac{\text{ch} \varphi}{1 + \text{sh} \varphi} > 0; \quad \tau \in [0, \tau_\infty), \quad (6.14)$$

где<sup>11</sup>

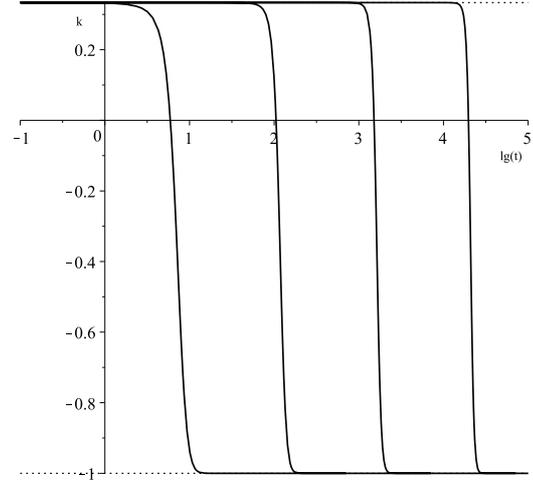
$$\tau_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Lambda \langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (6.15)$$

---

<sup>11</sup>  $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$ .



**Рис. 4.** Эволюция эффективного коэффициента баротропии  $\kappa(t)$  (тонкая линия) и инвариантного ускорения  $\Omega(t)$  (жирная линия) относительно точного решения (6.9) при  $\Lambda = 1$ . Пунктирными линиями показаны асимптоты  $-1$ ;  $1/3$ ;  $1$ .



**Рис. 5.** Эволюция эффективного коэффициента баротропии  $\kappa(t)$  относительно точного решения (6.9) в зависимости от космологической постоянной  $\Lambda$  слева – направо:  $\Lambda = 1$ ,  $\Lambda = 10$ ,  $\Lambda = 100$ ,  $\Lambda = 1000$ .

## 7. Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной

### 7.1. Модель первоначального неравновесного распределения

Таким образом, как мы отмечали выше, математическая модель процесса восстановления LTE в космологической плазме сводится к двум параметрическим уравнениям (5.25) и (5.36), определяющим *при заданной функции*  $\Phi(Z)$  связи вида:

$$\tau = \tau(Z) \quad (5.25); \quad (7.1)$$

$$y = y(Z) \quad (5.36), \quad (7.2)$$

разрешая которые, мы можем определить функцию  $y(\tau)$  и, тем самым, формально полностью решить поставленную задачу. Таким образом, окончательное решение задачи находится в квадратурах заданием начального распределения неравновесных частиц  $\Delta f_0(p)$  и последующим определением интегральной функции  $\Phi(Z)$  (5.20). Заметим, что формально параметрические уравнения (5.25) и (5.36), как и определение функции  $\Phi(Z)$ , не отличаются от аналогичных, полученных ранее автором в работах [4], [20]. Принципиально новый момент, вносимый ускорением Вселенной, заключается в связи  $\tau(t)$  (5.11).

Для построения численной модели рассмотрим первоначальное распределение типа белого шума:

$$\Delta f_0(\rho) = \frac{A}{\rho^3} \chi(\rho_0 - \rho), \quad (7.3)$$

где  $A$  – нормировочная постоянная,  $\rho_0 > 1$  – безразмерный параметр,  $\xi(x)$  – ступенчатая функция Heaviside, так что конформная плотность энергии относительно этого распределения равна:

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = \frac{\langle \tilde{p} \rangle_0^4 A \rho_0}{32\pi^5}. \quad (7.4)$$

Вычисляя функцию  $\Phi(Z)$  относительно распределения (7.3), найдем:

$$\Phi(Z) = e^{-x} - x \text{Ei}(x); \quad x \equiv \frac{Z}{\rho_0}, \quad (7.5)$$

где  $Ei(x)$  есть интегральная показательная функция

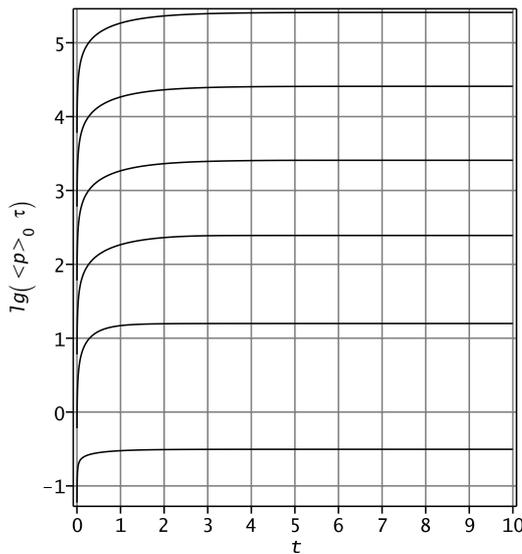
$$Ei(x) = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} dt.$$

## 7.2. Результаты численного интегрирования

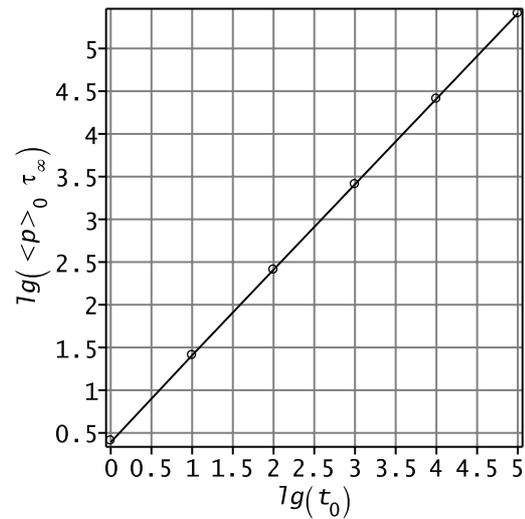
Задача, таким образом, сводится к численному интегрированию системы уравнений (5.11), (5.25), (5.36). В статье [29] (см. также [30]) описана авторская программа в пакете Maple численного моделирования этой задачи и представлены некоторые результаты численного моделирования описанной выше математической модели восстановления термодинамического равновесия ускоренной Вселенной. Ниже представлены более полные результаты численного моделирования и их анализ. В дальнейшем в соответствии с (6.5) и (6.9) удобно ввести *временную космологическую постоянную*

$$t_0 \equiv 4\Lambda. \quad (7.6)$$

На Рис. 7.7 представлены результаты численного интегрирования для определения параметра  $\tau_{\infty}$ . В частности, интегрирование соотношения (5.11) подтвердило нечувствительность величины  $\tau_{\infty}$  от ряда параметров и, фактически, подтвердило оценочную формулу (6.15), которая не учитывала деталей логарифмической зависимости параметра  $\langle \xi \rangle$  от времени. На Рис. 7 показаны результаты численного интегрирования этой величины.



**Рис. 6.** Зависимость десятичного логарифма безразмерной временной переменной  $\langle \bar{p} \rangle_0 \tau$  от космологического времени  $t$ . Снизу – вверх:  $t_0 = 1; 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5$ . Всюду принято  $N_0 = 100; N = 10$ .

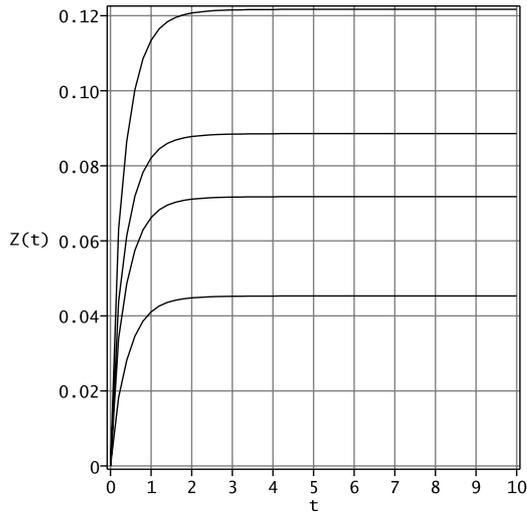


**Рис. 7.** Зависимость десятичного логарифма безразмерного временного параметра  $\tau_{\infty} \langle \bar{p} \rangle_0$  от десятичного логарифма космологической постоянной  $t_0$ . Сплошная линия –  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 10$ , точки –  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 10^5$ ; всюду  $N_0 = 100; N = 10$ .

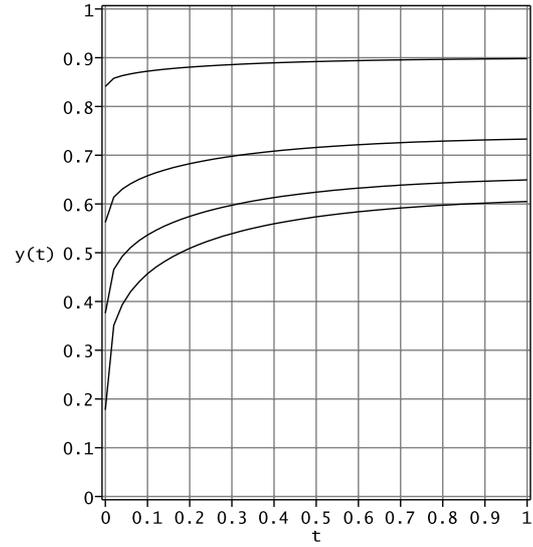
Эти результаты хорошо описываются формулой

$$\tau_{\infty} \approx \frac{2.57 t_0}{\langle \bar{p} \rangle_0}. \quad (7.7)$$

На Рис. 8 показана зависимость переменной  $Z(t)$  при различных значениях временной космологической постоянной.



**Рис. 8.** Зависимость безразмерной функции  $Z(t)$  от времени; всюду  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.



**Рис. 9.** Зависимость относительной температуры  $y(t)$  от времени; всюду  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

Как следует из результатов, представленных на этом рисунке, значение функции  $Z(t)$  также имеет предельное значение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = Z_\infty < \infty. \quad (7.8)$$

Согласно (5.14) это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  «замораживается» распределение сверхтепловых частиц:

$$\Delta f_a(\tau_\infty, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z_\infty}{\rho}}. \quad (7.9)$$

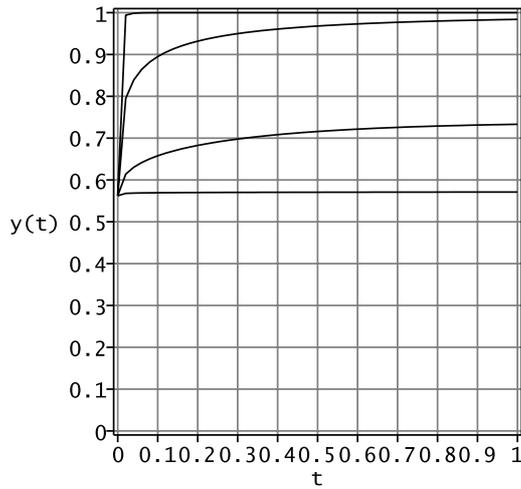
Таким образом, в современной Вселенной может остаться «хвост» неравновесных частиц сверхвысоких энергий:

$$E > E_\infty = Z_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0. \quad (7.10)$$

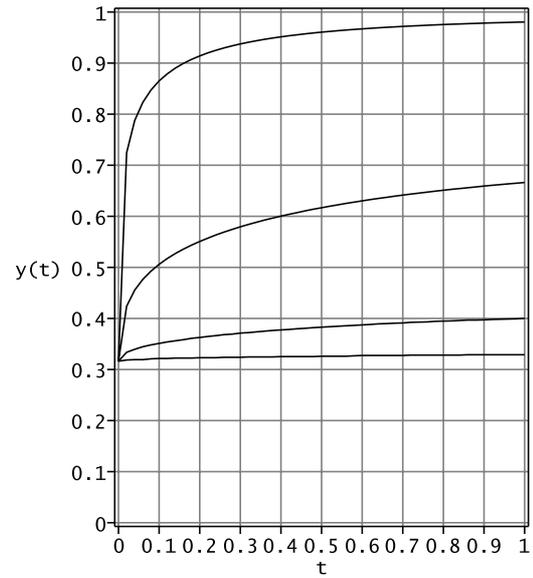
На Рис. 10–11 показаны результаты численного интегрирования для относительной температуры  $y(t) = T(t)/T_0(t) \leq 1$ . Согласно смыслу этой величины безразмерный параметр:

$$e_\infty = 1 - \sigma_\infty = 1 - y_\infty^4 > 0 \quad (7.11)$$

есть относительная доля энергии космологической плазмы, содержащаяся в неравновесном хвосте распределения.



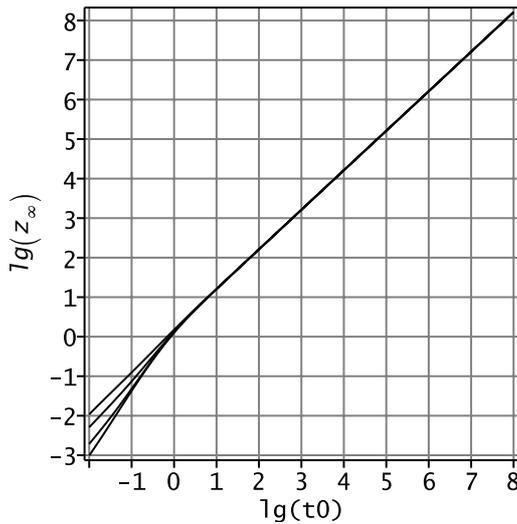
**Рис. 10.** Зависимость относительной температуры,  $y(t)$ , от времени; всюду  $\sigma_0 = 0.1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 10$ ;  $t_0$  — bottom-up: 0.1; 1; 10; 100.



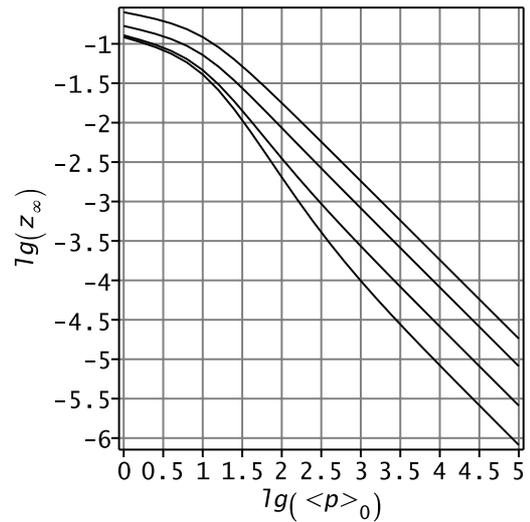
**Рис. 11.** Зависимость относительной температуры,  $y(t)$ , от времени; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $t_0$  — bottom-up: 1; 10; 100; 1000.

### 7.3. Асимптотические значения параметров неравновесного распределения на инфляционной стадии

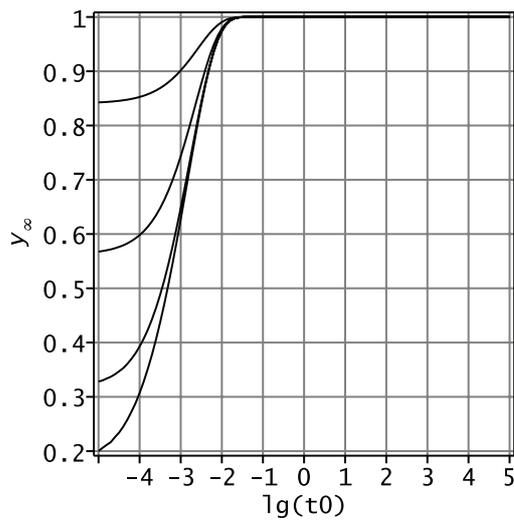
Для наблюдения в современную эпоху Вселенной важно знание возможных предельных значений параметров неравновесного распределения. Такими возможными наблюдаемыми параметрами являются относительная температура,  $y_\infty$ , относительная доля энергии, заключенной в неравновесном хвосте распределения, а также и форма этого распределения. На Рис. 12, 13, 14, 15, 16, 17 представлены вычисленные значения первых двух указанных параметров.



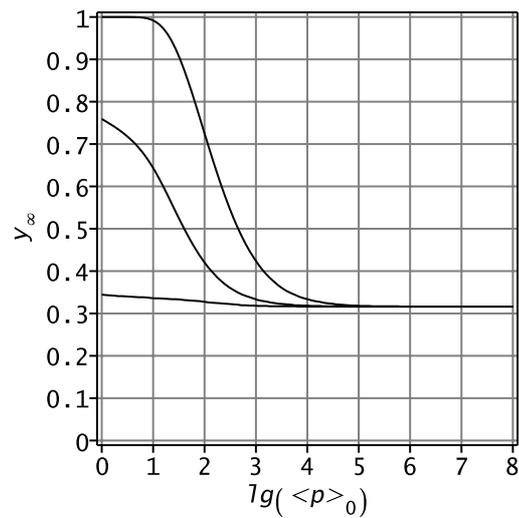
**Рис. 12.** Dependency of the dimensionless function  $Z_\infty$  on cosmological constant  $t_0$ ; it is everywhere  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 100$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — bottom-up: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



**Рис. 13.** Dependency of the dimensionless function  $Z_\infty$  on parameter  $\langle \bar{p} \rangle_0$ ; it is everywhere  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — bottom-up: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



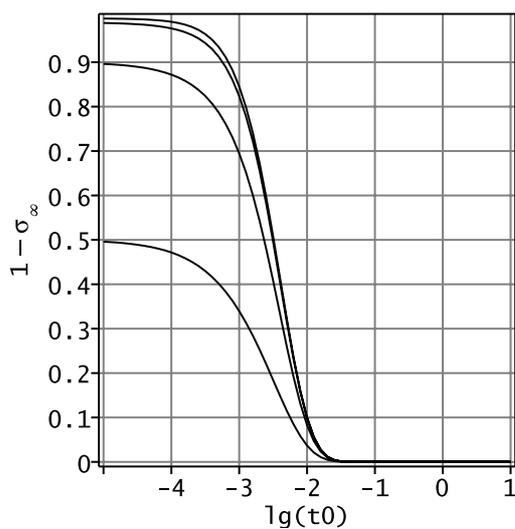
**Рис. 14.** Зависимость предельного значения относительной температуры,  $y_\infty$ , от космологической константы  $t_0$ ; всюду  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ,  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу — вверх: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



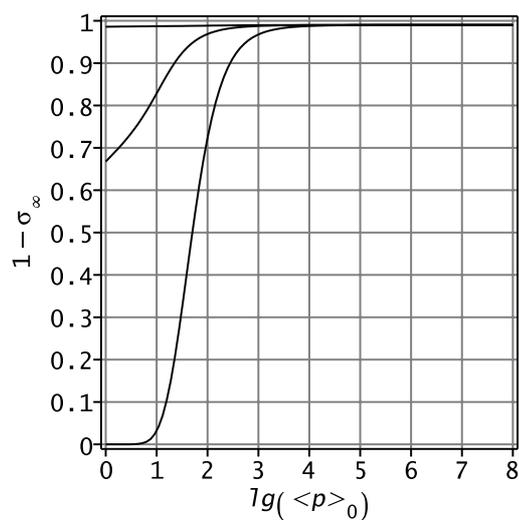
**Рис. 15.** Зависимость предельного значения относительной температуры,  $y_\infty$ , от десятичного логарифма параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ ; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $t_0$  — снизу — вверх: 0.1; 1; 10.

#### 7.4. Анализ результатов численного моделирования

Из представленных результатов следует, что начиная со значений величины параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$  порядка  $10 \div 100$ , возможно выживание неравновесных реликтовых частиц в современную эпоху эволюции Вселенной. Это — поразительный факт, так как согласно результатам более ранних статей Автора, в которых рассматривался стандартный космологический сценарий, исключающий инфляционную стадию, в современную эпоху могли выжить только реликтовые частицы с энергией  $10^{12} \text{Gev}$  и выше. В рассматриваемом здесь сценарии на современной инфляционной стадии могут выживать реликтовые частицы с энергией порядка 1 Кев и выше!



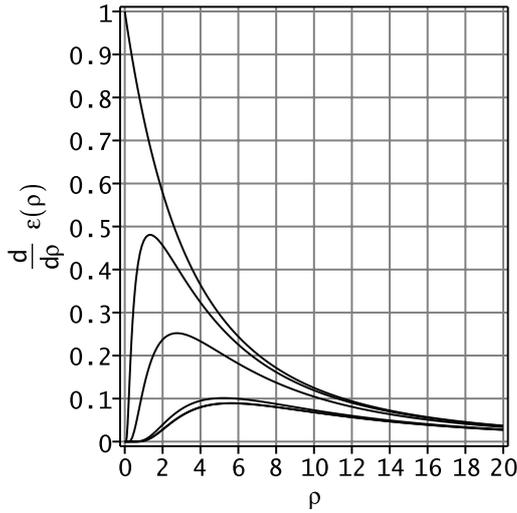
**Рис. 16.** Зависимость относительной доли энергии неравновесных частиц,  $1 - \sigma_\infty$ , от космологической константы  $t_0$ ; всюду  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — сверху-вниз: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



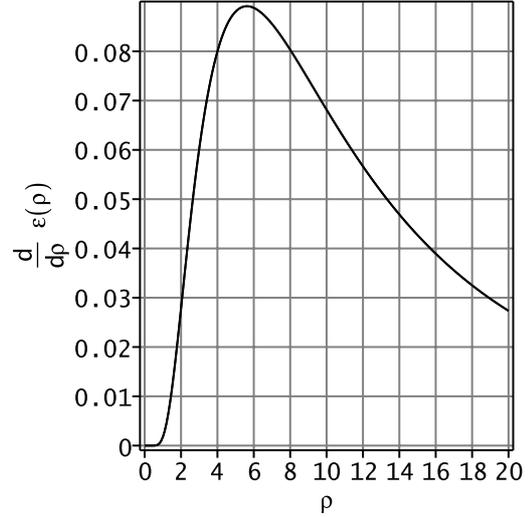
**Рис. 17.** Зависимость относительной доли энергии неравновесных частиц,  $1 - \sigma_\infty$ , от параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ ; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $t_0$  — сверху — вниз: 0.1; 1; 10.

На Рис. 18 представлена эволюция распределения плотности энергии неравновесных частиц в предположении их начального распределения в форме типа белого шума

$$\left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)_0 = A \frac{\chi(\rho_0 - \rho)}{(1 + \rho/\langle\tilde{p}\rangle_0)^3}. \quad (7.12)$$



**Рис. 18.** Эволюция распределения плотности энергии; всюду  $\sigma_0 = 0.5$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle\tilde{p}\rangle_0 = 10$ ,  $t_0 = 1$ ; сверху вниз:  $t = 0.0001$ ;  $0.01$ ;  $0.1$ ;  $1$ ;  $10$ ;  $100$ . Lines at  $t=10$  and  $t=100$  are coincide.



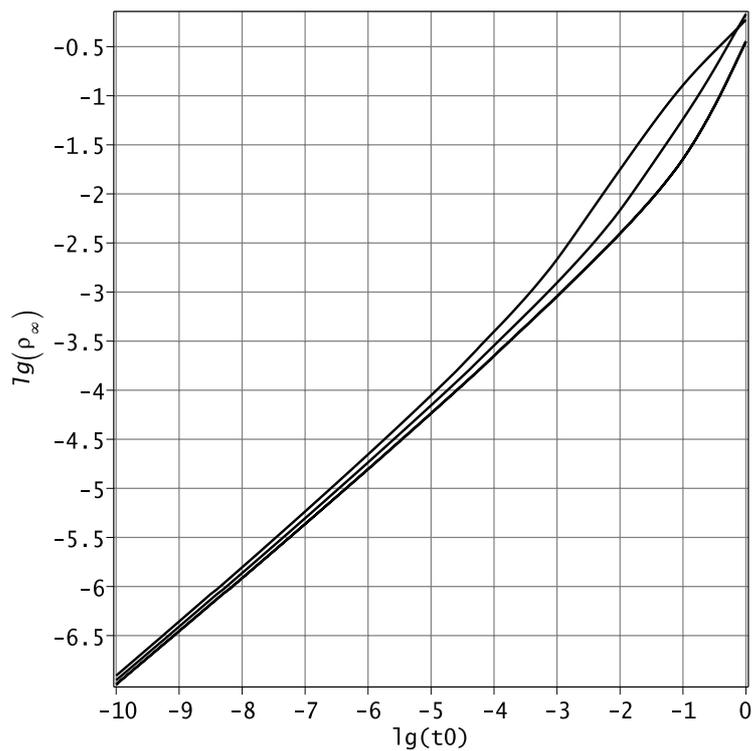
**Рис. 19.** Фиксация неравновесной функции распределения при  $t = \infty$ .  $\sigma_0 = 0.5$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle\tilde{p}\rangle_0 = 10$ ,  $t_0 = 1$ .

Вычисляя максимум распределения плотности энергии с помощью соотношений (5.14), найдем:

$$\rho_\infty^{max} = \sqrt{Z_\infty \langle\tilde{p}\rangle_0}. \quad (7.13)$$

На Рис. 20 показана зависимость максимума спектра энергии неравновесных частиц от космологического параметра  $t_0$ . Из этого рисунка можно увидеть, что при не очень больших значениях космологической константы максимум энергетического спектра лежит в области достаточно низких энергий, что делает принципиально возможным детектирование первичных неравновесных частиц в космических условиях.

Заметим, что величина безразмерной энергии  $\rho$  фактически означает, что в современную эпоху энергия частиц  $\rho\langle\tilde{p}\rangle_0$  во много раз превышает температуру реликтовых фотонов. Таким образом, в современную эпоху мы можем наблюдать истинно реликтовые частицы с энергиями порядка 1 Кев и выше в максимуме распределения. Говоря об «истинно реликтовых частицах», мы имеем ввиду частицы, которые выжили с момента рождения Вселенной, в отличие от реликтовых фотонов и нейтрино, которые сформировались в радиационно-доминированную эпоху. Детектирование истинно реликтовых частиц в космосе помогло бы получить информацию «из первых рук» о моменте рождения Вселенной, а также о фундаментальных взаимодействиях элементарных частиц при сверхвысоких энергиях, которые никогда не будут доступны земной цивилизации.



**Рис. 20.** Зависимость максимума предельного энергетического спектра  $\lg \rho_\infty$  от космологической постоянной при  $\sigma_0 = 0.01$ ,  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ . Снизу-вверх:  $\langle \bar{p} \rangle_0 = 1; 10; 100$ .

В следующих статьях мы рассмотрим процесс восстановления термодинамического равновесия во Вселенной с реальными значениями «космологической постоянной»  $\Lambda$ .

### Благодарности

В заключение Автор выражает благодарность профессору В.Н. Мельникову, который инициировал интерес Автора к рассматриваемой проблеме. Также Автор благодарен академику А.А. Старобинскому за обсуждение проблем космологических моделей с ускорением.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steven Weinberg. *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
2. H.M. Pilkuhn. *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, New York Inc, 1979.
3. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **25** No 4, 92 (1982)
4. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **29**, No 2, 19 (1986).
5. L.B. Okun, *Leptons and quarks*, North-Holland, Amsterdam · Oxford · New-York · Tokyo, 1981.
6. L.D. Landau, *J.Sov.Phys. (JETP)*, **10**, 718 (1940).
7. M. Froissart, *Phys. Rev.*, 123, 1053 (1961)
8. A. Martin, *Phys. Rev.*, 129, 1432 (1963)
9. A. Martin, *Nuovo. Cim.*, 142, 930 (1966)
10. Y.S. Jin, A. Martin, *Phys. Rev.B* 135, 1369 (1964)
11. M. Sugawara, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 336 (1965)
12. R.I. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge At the University Press, 1967.
13. Игнат'ев Ю.Г. // Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тезисы Советской гравитационной конференции. – Москва. – 1984.
14. Yu.G. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 1 (49), pp. 1–14.
15. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **23** No 8, 42 (1980).
16. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **23** No 9, 27 (1980).

17. Игнат'ев Ю.Г. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. – 1980. – Москва: Атомиздат. – Вып. 11. – с. 113.
18. Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26**, No 8, 19 (1983).
19. Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26** No 12 9 (1983)
20. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 101–113.
21. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.
22. Игнат'ев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. II. Модель энергобаланса. // *Пространство, время, и фундаментальные взаимодействия*. – No 1. 2013. – С. 79–98.
23. Игнат'ев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. III. Модель энергобаланса для инфляционной стадии. // *Пространство, время, и фундаментальные взаимодействия*. – No 2. 2013. С. 5–10.
24. Игнат'ев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. IV. Модель энергобаланса для стадии с произвольным ускорением. // *Пространство, время, и фундаментальные взаимодействия*. – No 3. 2013. С. 5–19.
25. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971.
26. Yu. G. Ignat'ev, *Russian Physics Journal*, Vol. 56, No. 6, November, 2013. – p. 693–706. DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4.
27. Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013.
28. Yu.G. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 19, No 4, 2013.
29. Yu. G. Ignat'ev, *Russian Physics Journal*, to be publish in Vol. 57, No. 1, Jenuvary, 2014; Yu.G. Ignatyev, arxiv.org/pdf/1310.2183.pdf [gr-qc] 8 October 2013.
30. Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013; Yu.G. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 19, No 4, 2013.

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.  
E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

*Yu. G. Ignat'ev*

## Thermodynamic equilibrium in the accelerated Universe is not available?

*Keywords:* Early Universe, Local Thermodynamic Equilibrium, Relativistic Kinetics, Scaling, Cosmic Rays, Early Inflation, Backward Acceleration.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

In this article there are considered non – equilibrium cosmological scenarios with the assumption that scaling of particles interaction is restored in range of extra-high energies. On basis of energy-balance equation's exact solutions it is obtained the strong conclusion about fundamental unattainability of local thermodynamic equilibrium in the accelerated Universe. There are presented the results of numerical simulation of previously constructed strict mathematical model which describes thermodynamic equilibrium's establishment in the originally nonequilibrium cosmological ultrarelativistic plasma for the Universe with an arbitrary acceleration with the assumption that scaling of interactions of elementary particles is restored at energies above the unitary limit. Limiting parametres of residual nonequilibrium distribution of extra-high energy relic particles are obtained. The assumption about possibility of detection of "truly relic particles which appeared at stage of early inflation, is put forward.

### REFERENCES

1. Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
2. H.M. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, New York Inc, 1979.
3. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **25** No 4, 92 (1982)
4. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **29**, No 2, 19 (1986).
5. L.B. Okun, *Leptons and quarks*, North-Holland, Amsterdam· Oxford · Tokyo, 1981.
6. L.D. Landau, *J.Sov.Phys. (JETP)*, **10**, 718 (1940).
7. M. Froissart, *Phys. Rev.*, **123**, 1053 (1961)
8. A. Martin, *Phys. Rev.*, **129**, 1432 (1963)
9. A. Martin, *Nuovo. Cim.*, **142**, 930 (1966)
10. Y.S. Jin, A. Martin, *Phys. Rev.***B** **135**, 1369 (1964)
11. M. Sugawara, *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 336 (1965)
12. R.I. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge At the University Press, 1967.
13. Yu.G. Ignat'ev, in: «*Actual theoretical and experimantal problems of relativity theory and gravitation*», Report of Soviet conference, Moscow, 1984 (in Russian).
14. Yu.G.Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 1 (49), pp. 1–14.
15. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **23** No 8, 42 (1980).
16. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **23** No 9, 27 (1980).
17. Yu.G.Ignatyev, in: *Problems of Gravitation Theory and Elementary Particles*, Moskow, Atomizdat, No 11, 113 (1980).
18. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **26**, No 8, 19 (1983).
19. Yu.G. Ignat'ev, *J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov)*. **26** No 12 9 (1983)
20. Yu.G.Ignatyev, D.Yu.Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 101–113.
21. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.
22. Yu.G. Ignat'ev. *Space, Time and Fundamental Interactions*. – No 1. 2013. – pp. 79–98.
23. Yu.G. Ignat'ev. *Space, Time and Fundamental Interactions*. – No 2. 2013. – pp. 5–10.
24. Yu.G. Ignat'ev. *Space, Time and Fundamental Interactions*. – No 3. 2013. pp. 5–19.
25. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971
26. Yu. G. Ignat'ev, *Russian Physics Journal*, Vol. 56, No. 6, November, 2013. – p. 693-706 DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4.
27. Yurii Ignatyev, *arXiv:1306.3633v1* [gr-qc] 13 June 2013.
28. Yu.G. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 19, No 4, 2013.
29. Yu. G. Ignat'ev, *Russian Physics Journal*, to be publish in Vol. 57, No. 1, Jenuvary, 2014; Yu.G. Ignatyev, [arxiv.org/pdf/1310.2183.pdf](http://arxiv.org/pdf/1310.2183.pdf) [gr-qc] 8 October 2013.
30. Yurii Ignatyev, *arXiv:1306.3633v1* [gr-qc] 13 June 2013; Yu.G. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be publish in vol. 19, No 4, 2013.

Received 29.12.2013

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.  
E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru