УДК 514.82

Л. Н. Кривоносов,[1] ***В. А. Лукьянов*** [2]

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЯНГА-МИЛЛСА ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ранее нами было найдено полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики в пространстве конформной связности без кручения в случае равенства нулю тензора электромагнитного поля. В данной работе эта задача решена в более общей ситуации: при наличии электромагнитного поля.

Ключевые слова: кривизна связности, уравнения Эйнштейна, уравнения Максвелла, уравнения Янга-Миллса, центрально-симметрическая метрика, 4-мерное многообразие конформной связности, эллиптическая функция Вейерштрасса, решение Райсснера-Нордстрема.

PACS: 04.50.Kd

Введение

В [1] мы нашли полное решение уравнений Янга-Миллса для метрики вида

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + e^{2\mu}(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2), \tag{0.1}$$

где λ, μ, ν - функции только от r и t, а функция $\sigma(\theta)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\varkappa\sigma, \qquad \varkappa = const. \tag{0.2}$$

Это условие означает, что бинарная квадратичная форма $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2$ имеет постоянную гауссову кривизну, равную $\varkappa$. Поскольку метрика многообразия конформной связности определена лишь с точностью до множителя, можно упростить квадратичную форму (0.1), поделив ее на один из коэффициентов $e^{2\nu}$, $e^{2\lambda}$ или $e^{2\mu}$. Удобнее всего избавиться от $e^{2\mu}$, т.к. в итоге получается прямая сумма двух бинарных квадратичных форм

$$\psi = \left(-e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2\right) + (d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2), \tag{0.3}$$

последняя из которых имеет постоянную гауссову кривизну $\varkappa$.

Как известно [2, с. 183], бинарную квадратичную форму всегда можно привести путем замены локальных координат к виду $-dt^2 + e^{2\lambda}dr^2$, а также к виду $-e^{2\nu}dt^2 + dr^2$. Поэтому метрика (0.1) всегда приводима как к первому каноническому виду

$$\psi = -dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2, \tag{0.4}$$

так и ко второму

$$\psi = -e^{2\nu}dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\, d\varphi^2. \tag{0.5}$$

Оказывается, что и при наличии электромагнитного поля, зависящего в неголономном базисе только от двух переменных r и t, для обоих канонических видов при $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} \neq const$ уравнения Янга-Миллса решаются в конечном виде с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\wp$.

`Замечание.` А.П. Трунев в работах [3-7] использовал наше решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики для моделирования геометрии пространства-времени внутри адронов. При этом он был вынужден придумывать механизм возникновения электромагнитного поля в исходной решетке, которая не содержит электромагнитного поля. Настоящая работа показывает, что в подобном механизме нет необходимости, т.к. уравнения Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики допускают решения того же вида, который использовал А.П. Трунев, и

[1] E-mail: oxyzt2@ya.ru
[2] E-mail: oxyzt@ya.ru

при наличии электромагнитного поля. По нашему мнению, указанное моделирование оправдано в масштабе адронов, т.к. в этом случае слабое взаимодействие еще не является главенствующим, и им можно пренебречь. Но вряд ли оно оправдано в масштабах кварка, лептона или преона, т.к. в этих масштабах слабым взаимодействием пренебречь уже нельзя, а многообразие конформной связности **без кручения** не приспособлено для моделирования слабого взаимодействия (см. введение к [8]).

1. Вывод уравнений Янга-Миллса

Можно было бы воспользоваться готовыми уравнениями Янга-Миллса, выведенными в [8, формула 65]. Однако они записаны в ковариантных производных второго порядка в неголономном базисе, а решать их можно только в голономном базисе, записав в обычных координатных производных. Переход к координатным производным связан с трудоемкой вычислительной работой. Поэтому мы выведем уравнения Янга-Миллса, воспользовавшись алгоритмом, описанным в [1]. Отправляясь от метрики (0.3), введем пфаффовы формы

$$\omega^1 = e^{\nu}dt, \qquad \omega^2 = e^{\lambda}dr, \qquad \omega^3 = d\theta, \qquad \omega^4 = \sigma\left(\theta\right)d\varphi. \tag{1.1}$$

Тогда метрика (0.3) запишется в стандартном виде $\psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j$, где

$$\left(\eta_{ij}\right) = \left(\eta^{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть тензор Минковского. Далее мы воспользуемся обозначениями и формулами из [1], в частности, точкой над буквой обозначена производная по t, а штрихом - производная по r

$$d\omega^1 = -e^{-\lambda}\nu'\omega^1\wedge\omega^2, \qquad d\omega^2 = e^{-\nu}\dot{\lambda}\omega^1\wedge\omega^2, \qquad d\omega^3 = 0, \qquad d\omega^4 = \tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma}\omega^3\wedge\omega^4. \tag{1.2}$$

Пфаффовы формы Кристоффеля для квадратичной формы (0.3)

$$\omega_1^2 = e^{-\lambda}\nu'\omega^1 + e^{-\nu}\dot{\lambda}\omega^2, \qquad \omega_3^4 = \frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^4, \qquad \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0.$$

Внешние 2-формы римановой кривизны квадратичной формы (0.3)

$$R_1^2 = A\omega^1\wedge\omega^2, \qquad R_3^4 = -\varkappa\omega^3\wedge\omega^4, \qquad R_1^3 = R_1^4 = R_2^3 = R_2^4 = 0,$$

где для краткости обозначено

$$A \overset{def}{=} e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\lambda}^2\right). \tag{1.3}$$

Ненулевые компоненты тензора Риччи $R_{ij} = R_{ijk}^k$ и скалярная кривизна $R = \eta^{ij}R_{ij}$ равны

$$R_{11} = A, \qquad R_{22} = -A, \qquad R_{33} = R_{44} = -\varkappa, \qquad R = -2A - 2\varkappa. \tag{1.4}$$

Для компонент b_{jm} пфаффовых форм $\omega_i = b_{ij}\omega^j$ можно вычислить симметрическую часть $b_{(jm)} = b_{jm} + b_{mj}$ из уравнений Эйнштейна $b_{(jm)} = R_{jm} - \frac{1}{6}R\eta_{jm}$ [8, с. 439]. Имеем

$$\begin{array}{l} b_{11} = \frac{1}{3}A - \frac{1}{6}\varkappa, \qquad b_{22} = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{6}\varkappa, \qquad b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{3}\varkappa, \\ b_{(jm)} = 0 \text{ при } j \neq m, \end{array} \tag{1.5}$$

то есть недиагональные элементы кососимметричны.

Уравнения Максвелла имеют вид

$$d\Phi_0^0 = 0, \qquad d*\Phi_0^0 = 0 \tag{1.6}$$

[8, с. 440], где

$$\begin{array}{c} \Phi_0^0 = \frac{1}{2}b_{[ij]}\omega^j\wedge\omega^i = \frac{1}{2}\left(b_{ij} - b_{ji}\right)\omega^j\wedge\omega^i = b_{ij}\omega^j\wedge\omega^i = \\ = -2\left(b_{12}\omega^1\wedge\omega^2 + b_{13}\omega^1\wedge\omega^3 + b_{14}\omega^1\wedge\omega^4 + b_{23}\omega^2\wedge\omega^3 + b_{24}\omega^2\wedge\omega^4 + b_{34}\omega^3\wedge\omega^4\right), \end{array} \tag{1.7}$$

а $*$ - оператор Ходжа

$$*\Phi_0^0 = 2\left(-b_{12}\omega^3\wedge\omega^4 + b_{13}\omega^2\wedge\omega^4 - b_{14}\omega^2\wedge\omega^3 + b_{23}\omega^1\wedge\omega^4 - b_{24}\omega^1\wedge\omega^3 + b_{34}\omega^1\wedge\omega^2\right)$$

[1, с. 352]. Φ_0^0 - это одна из компонент матрицы конформной кривизны

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}$$

[8, с. 435]. Уравнения (1.6) в компонентах принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(b_{13}' + b_{13}\nu'\right) &= e^{-\nu}\left(\dot{b_{23}} + b_{23}\dot{\lambda}\right), \qquad & e^{-\lambda}\left(b_{14}' + b_{14}\nu'\right) &= e^{-\nu}\left(\dot{b_{24}} + b_{24}\dot{\lambda}\right), \\ \dot{b_{34}}e^{-\nu} - b_{14}\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma} &= 0, & b_{34}'e^{-\lambda} - b_{24}\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(b_{24}' + b_{24}\nu'\right) &= e^{-\nu}\left(\dot{b_{14}} + b_{14}\dot{\lambda}\right), \qquad & e^{-\lambda}\left(b_{23}' + b_{23}\nu'\right) &= e^{-\nu}\left(\dot{b_{13}} + b_{13}\dot{\lambda}\right), \\ \dot{b_{12}}e^{-\nu} + b_{23}\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma} &= 0, & b_{12}'e^{-\lambda} + b_{13}\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Функция σ зависит только от θ, а остальные величины, входящие в эти уравнения, наоборот, от θ не зависят, поэтому из последних двух уравнений (1.8) из последних двух уравнений (1.9) следует, что либо

$$\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} = C = const, \tag{1.10}$$

либо

$$b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = 0, \qquad b_{12} = const, \qquad b_{34} = const. \tag{1.11}$$

Сначала мы получим уравнения Янга-Миллса для общего случая, не пользуясь уравнениями (1.10) или (1.11), а затем рассмотрим каждый из этих вариантов отдельно.

Так как $\omega_i = b_{ij}\omega^j$, из формул (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\frac{1}{3}A - \frac{1}{6}\varkappa\right)\omega^1 + b_{12}\omega^2 + b_{13}\omega^3 + b_{14}\omega^4, \\ \omega_2 &= -b_{12}\omega^1 + \left(-\frac{1}{3}A + \frac{1}{6}\varkappa\right)\omega^2 + b_{23}\omega^3 + b_{24}\omega^4 \\ \omega_3 &= -b_{13}\omega^1 - b_{23}\omega^2 + \left(\frac{1}{6}A - \frac{1}{3}\varkappa\right)\omega^3 + b_{34}\omega^4, \\ \omega_4 &= -b_{14}\omega^1 - b_{24}\omega^2 - b_{34}\omega^3 + \left(\frac{1}{6}A - \frac{1}{3}\varkappa\right)\omega^4. \end{aligned}$$

Находим внешние формы конформной кривизны $\Phi_j^i = R_j^i + \omega^i\wedge\omega_j + \eta^{im}\eta_{jn}\omega_m\wedge\omega^n$ и $\Phi_i = d\omega_i - \omega_i^k\wedge\omega_k$ и сразу вычисляем преобразования Ходжа [1, с. 352]

$$\begin{aligned} *\Phi_3^4 &= \tfrac{1}{3}\left(A+\varkappa\right)\omega^1\wedge\omega^2 + b_{13}\omega^2\wedge\omega^3 + b_{14}\omega^2\wedge\omega^4 + b_{23}\omega^1\wedge\omega^3 + b_{24}\omega^1\wedge\omega^4, \\ *\Phi_2^4 &= \tfrac{1}{6}\left(A+\varkappa\right)\omega^1\wedge\omega^3 + b_{12}\omega^2\wedge\omega^3 - b_{14}\omega^3\wedge\omega^4 + b_{23}\omega^1\wedge\omega^2 - b_{34}\omega^1\wedge\omega^4, \\ *\Phi_2^3 &= -\tfrac{1}{6}\left(A+\varkappa\right)\omega^1\wedge\omega^4 - b_{12}\omega^2\wedge\omega^4 - b_{13}\omega^3\wedge\omega^4 - b_{24}\omega^1\wedge\omega^2 - b_{34}\omega^1\wedge\omega^3, \\ *\Phi_1^4 &= -\tfrac{1}{6}\left(A+\varkappa\right)\omega^2\wedge\omega^3 - b_{12}\omega^1\wedge\omega^3 - b_{24}\omega^3\wedge\omega^4 + b_{13}\omega^1\wedge\omega^2 + b_{34}\omega^2\wedge\omega^4, \\ *\Phi_1^3 &= \tfrac{1}{6}\left(A+\varkappa\right)\omega^2\wedge\omega^4 + b_{12}\omega^1\wedge\omega^4 - b_{23}\omega^3\wedge\omega^4 - b_{14}\omega^1\wedge\omega^2 + b_{34}\omega^2\wedge\omega^3, \\ *\Phi_1^2 &= \tfrac{1}{3}\left(A+\varkappa\right)\omega^3\wedge\omega^4 - b_{13}\omega^1\wedge\omega^4 - b_{23}\omega^2\wedge\omega^4 + b_{14}\omega^1\wedge\omega^3 + b_{24}\omega^2\wedge\omega^3; \end{aligned}$$

$$*\Phi_1=\left(\dot b_{12}e^{-\nu}-\frac{1}{3}e^{-\lambda}A'\right)\omega^3\wedge\omega^4-\left(\dot b_{13}e^{-\nu}-b_{23}e^{-\lambda}\nu'\right)\omega^2\wedge\omega^4+\left(\dot b_{14}e^{-\nu}-b_{24}e^{-\lambda}\nu'\right)\omega^2\wedge\omega^3+$$
$$+\left(b'_{14}e^{-\lambda}-b_{24}e^{-\nu}\dot\lambda\right)\omega^1\wedge\omega^3-\left(b'_{13}e^{-\lambda}-b_{23}e^{-\nu}\dot\lambda\right)\omega^1\wedge\omega^4-b_{14}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^1\wedge\omega^2,$$
$$*\Phi_2=\left(b'_{12}e^{-\lambda}-\frac{1}{3}e^{-\nu}\dot A\right)\omega^3\wedge\omega^4-\left(\dot b_{23}e^{-\nu}-b_{13}e^{-\lambda}\nu'\right)\omega^2\wedge\omega^4+\left(\dot b_{24}e^{-\nu}-b_{14}e^{-\lambda}\nu'\right)\omega^2\wedge\omega^3+$$
$$+\left(b'_{24}e^{-\lambda}-b_{14}e^{-\nu}\dot\lambda\right)\omega^1\wedge\omega^3-\left(b'_{23}e^{-\lambda}-b_{13}e^{-\nu}\dot\lambda\right)\omega^1\wedge\omega^4-b_{24}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\omega^1\wedge\omega^2,$$
$$*\Phi_3=-\frac{1}{6}e^{-\nu}\dot A\omega^2\wedge\omega^4-\frac{1}{6}e^{-\lambda}A'\omega^1\wedge\omega^4,\quad *\Phi_4=\frac{1}{6}e^{-\nu}\dot A\omega^2\wedge\omega^3+\frac{1}{6}e^{-\lambda}A'\omega^1\wedge\omega^3.$$

Находим внешние 3-формы $d*\Phi_i$, при возможности упрощая их с помощью (1.8) и (1.9)

$$\begin{aligned}
d*\Phi_1 &= \begin{pmatrix} e^{-2\nu}\left(\ddot b_{14}-\dot b_{14}\dot\nu+\dot b_{14}\dot\lambda\right)+e^{-2\lambda}\left(b'_{14}\lambda'-b''_{14}-b'_{14}\nu'\right)+ \\ +e^{-\lambda-\nu}\left(b_{24}\dot\lambda'-\dot b_{24}\nu'+b'_{24}\dot\lambda-b_{24}\dot\nu'\right)\end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+\\
&+\begin{pmatrix} e^{-2\nu}\left(\dot b_{13}\dot\nu-\ddot b_{13}-\dot b_{13}\dot\lambda\right)+e^{-2\lambda}\left(b'_{13}\nu'+b''_{13}-b'_{13}\lambda'\right)+ \\ +e^{-\lambda-\nu}\left(b_{23}\dot\nu'+\dot b_{23}\nu'-b'_{23}\dot\lambda-b_{23}\dot\lambda'\right)\end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\\
&+\left(\frac{1}{3}e^{-\lambda-\nu}\left(A'\dot\lambda-\dot A'\right)+e^{-2\nu}\left(\ddot b_{12}-\dot b_{12}\dot\nu\right)+\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\left(b'_{13}e^{-\lambda}-b_{23}\dot\lambda e^{-\nu}\right)\right)\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^4+\\
&+\left(\dot b'_{12}e^{-\lambda-\nu}+\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\dot b_{13}e^{-\nu}+\frac{1}{3}e^{-2\lambda}\left(A'\lambda'-A''\right)\right)\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4,\\
d*\Phi_2 &= \begin{pmatrix} e^{-2\nu}\left(\ddot b_{24}-\dot b_{24}\dot\nu+\dot b_{24}\dot\lambda\right)+e^{-2\lambda}\left(b'_{24}\lambda'-b''_{24}-b'_{24}\nu'\right)+ \\ +e^{-\lambda-\nu}\left(b_{14}\dot\lambda'-\dot b_{14}\nu'+b'_{14}\dot\lambda-b_{14}\dot\nu'\right)+b_{24}\left(\varkappa+\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\right)^2\right)\end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+\\
&+\begin{pmatrix} e^{-2\nu}\left(\dot b_{23}\dot\nu-\ddot b_{23}-\dot b_{23}\dot\lambda\right)+e^{-2\lambda}\left(b'_{23}\nu'+b''_{23}-b'_{23}\lambda'\right)+ \\ +e^{-\lambda-\nu}\left(b_{13}\dot\nu'+\dot b_{13}\nu'-b'_{13}\dot\lambda-b_{13}\dot\lambda'\right)+\end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\\
&+\left(\dot b'_{12}e^{-\lambda-\nu}+\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}b'_{23}e^{-\lambda}+\frac{1}{3}e^{-2\nu}\left(\dot A\dot\nu-\ddot A\right)\right)\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^4+\\
&+\left(\frac{1}{3}e^{-\lambda-\nu}\left(\dot A\nu'-\dot A'\right)+e^{-2\lambda}\left(b''_{12}-b'_{12}\lambda'\right)+\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\left(\dot b_{23}e^{-\nu}-b_{13}\nu'e^{-\lambda}\right)\right)\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4,\\
d*\Phi_3 &= \frac{1}{6}\left(e^{-2\lambda}\left(A''-A'\lambda'+A'\nu'\right)+e^{-2\nu}\left(\dot A\dot\nu-\ddot A-\dot A\dot\lambda\right)\right)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^4+\\
&+\frac{1}{6\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta}\left(A'e^{-\lambda}\omega^1+\dot Ae^{-\nu}\omega^2\right)\wedge\omega^3\wedge\omega^4,\\
d*\Phi_4 &= \frac{1}{6}\left(e^{-2\lambda}\left(A'\lambda'-A''-A'\nu'\right)+e^{-2\nu}\left(\ddot A-\dot A\dot\nu+\dot A\dot\lambda\right)\right)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3.
\end{aligned}$$

При $i=1$ имеем первое уравнение Янга-Миллса [1, с. 352]

$$d*\Phi_1+\omega_i\wedge*\Phi_1^i-*\Phi_i\wedge\omega_1^i-*\Phi_0^0\wedge\omega_1=0.$$

С помощью полученных выше выражений запишем его в компонентах и придем к

$$\begin{gathered}
e^{-2\nu}\left(\ddot b_{14}-\dot b_{14}\dot\nu+\dot b_{14}\dot\lambda-b_{14}\dot\lambda^2\right)+e^{-\lambda-\nu}\left(2b'_{24}\dot\lambda-2\dot b_{24}\nu'-b_{24}\dot\nu'+b_{24}\dot\lambda'\right)+\\
+e^{-2\lambda}\left(b'_{14}\lambda'-b''_{14}-b'_{14}\nu'+b_{14}\nu'^2\right)+Ab_{14}-4b_{12}b_{24}-4b_{13}b_{34}=0,\\
e^{-2\nu}\left(\dot b_{13}\dot\nu-\ddot b_{13}-\dot b_{13}\dot\lambda+b_{13}\dot\lambda^2\right)+e^{-\lambda-\nu}\left(2\dot b_{23}\nu'-2b'_{23}\dot\lambda+b_{23}\dot\nu'-b_{23}\dot\lambda'\right)+\\
+e^{-2\lambda}\left(b''_{13}-b'_{13}\lambda'+b'_{13}\nu'-b_{13}\nu'^2\right)-Ab_{13}+4b_{12}b_{23}-4b_{14}b_{34}=0,\\
\tfrac{1}{3}e^{-\lambda-\nu}\left(\dot A\nu'+A'\dot\lambda-\dot A'\right)-e^{-2\lambda}b'_{12}\nu'-e^{-2\nu}\dot b_{12}\dot\nu+4b_{13}b_{23}+4b_{14}b_{24}+\\
+\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma}\left(e^{-\lambda}b'_{13}-e^{-\nu}\left(\dot b_{23}+b_{23}\dot\lambda+b_{23}\dot\nu\right)\right)=0,\\
\tfrac{1}{3}e^{-2\lambda}\left(A'\lambda'-A''\right)+\tfrac{1}{6}\left(\varkappa^2-A^2\right)+\tfrac{1}{3}e^{-2\nu}\dot A\dot\lambda+\\
+2\left((b_{12})^2+(b_{13})^2+(b_{14})^2+(b_{23})^2+(b_{24})^2+(b_{34})^2\right)=0.
\end{gathered}\tag{1.12}$$

При $i=2$ получаем еще четыре уравнения

$$\begin{gathered}
e^{-2\nu}\left(\ddot{b}_{24}-\dot{b}_{24}\dot{\nu}+\dot{b}_{24}\dot{\lambda}-b_{24}\dot{\lambda}^{2}\right)+e^{-\lambda-\nu}\left(2b'_{14}\dot{\lambda}-2\dot{b}_{14}\nu'-b_{14}\dot{\nu}'+b_{14}\dot{\lambda}'\right)+\\
+e^{-2\lambda}\left(b'_{24}\lambda'-b''_{24}-b'_{24}\nu'+b_{24}\nu'^{2}\right)+\left(A+\varkappa+\left(\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma}\right)^{2}\right)b_{24}-4b_{12}b_{14}-4b_{23}b_{34}=0,\\
e^{-2\nu}\left(\dot{b}_{23}\dot{\nu}-\ddot{b}_{23}-\dot{b}_{23}\dot{\lambda}+b_{23}\dot{\lambda}^{2}\right)+e^{-\lambda-\nu}\left(2\dot{b}_{13}\nu'-2b'_{13}\dot{\lambda}+b_{13}\dot{\nu}'-b_{13}\dot{\lambda}'\right)+\\
+e^{-2\lambda}\left(b''_{23}-b'_{23}\lambda'+b'_{23}\nu'-b_{23}\nu'^{2}\right)-Ab_{23}+4b_{12}b_{13}-4b_{24}b_{34}=0,\\
\tfrac{1}{3}e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{A}\nu'+A'\dot{\lambda}-\dot{A}'\right)+4b_{13}b_{23}+4b_{14}b_{24}-e^{-2\lambda}b'_{12}\lambda'-e^{-2\nu}\dot{b}_{12}\dot{\lambda}+\\
+\tfrac{d\sigma}{d\theta}\tfrac{1}{\sigma}\left(e^{-\nu}\dot{b}_{23}-e^{-\lambda}\left(b'_{13}+b_{13}\lambda'+b_{13}\nu'\right)\right)=0,\\
\tfrac{1}{3}e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu}-\ddot{A}\right)+\tfrac{1}{6}\left(A^{2}-\varkappa^{2}\right)+\tfrac{1}{3}e^{-2\lambda}A'\nu'+\\
+2\left(\left(b_{13}\right)^{2}+\left(b_{14}\right)^{2}+\left(b_{23}\right)^{2}+\left(b_{24}\right)^{2}-\left(b_{12}\right)^{2}-\left(b_{34}\right)^{2}\right)=0.
\end{gathered}\tag{1.13}$$

При $i=3$ будем иметь

$$\begin{gathered}
b_{23}b_{24}-b_{13}b_{14}=0,\quad b_{23}\varkappa-4b_{24}b_{34}+4b_{12}b_{13}=0,\quad b_{13}\varkappa-4b_{14}b_{34}+4b_{12}b_{23}=0,\\
\tfrac{1}{6}e^{-2\lambda}\left(A''-A'\lambda'+A'\nu'\right)+\tfrac{1}{6}e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu}-\ddot{A}-\dot{A}\dot{\lambda}\right)+\tfrac{1}{6}\left(A^{2}-\varkappa^{2}\right)+\\
+2\left(\left(b_{13}\right)^{2}-\left(b_{14}\right)^{2}-\left(b_{23}\right)^{2}+\left(b_{24}\right)^{2}-\left(b_{12}\right)^{2}-\left(b_{34}\right)^{2}\right)=0.
\end{gathered}\tag{1.14}$$

При $i=4$ возникают только три новых уравнения

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{6}e^{-2\lambda}\left(A''-A'\lambda'+A'\nu'\right)+\tfrac{1}{6}e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu}-\ddot{A}-\dot{A}\dot{\lambda}\right)+\tfrac{1}{6}\left(A^{2}-\varkappa^{2}\right)+\\
+2\left(-\left(b_{13}\right)^{2}+\left(b_{14}\right)^{2}+\left(b_{23}\right)^{2}-\left(b_{24}\right)^{2}-\left(b_{12}\right)^{2}-\left(b_{34}\right)^{2}\right)=0,\\
b_{24}\varkappa+4b_{12}b_{14}+4b_{23}b_{34}=0,\qquad b_{14}\varkappa+4b_{12}b_{24}+4b_{13}b_{34}=0.
\end{gathered}\tag{1.15}$$

Итак, все уравнения Янга-Миллса свелись к (1.8), (1.9) и (1.12)-(1.15), где величина A вычисляется по формуле (1.3).

2. Отыскание решений системы уравнений (1.8), (1.9) и (1.12)-(1.15)

Первый случай, $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma}\neq const$

Подставим (1.11) в уравнения (1.12)-(1.15) и получим всего три независимых уравнения

$$\begin{gathered}
\dot{A}\nu'+A'\dot{\lambda}-\dot{A}'=0,\\
e^{-2\lambda}\left(A'\lambda'-A''\right)-\tfrac{1}{2}A^{2}+e^{-2\nu}\dot{A}\dot{\lambda}+\tfrac{1}{2}K^{2}=0,\\
e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu}-\ddot{A}\right)+\tfrac{1}{2}A^{2}+e^{-2\lambda}A'\nu'-\tfrac{1}{2}K^{2}=0,
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $K\overset{def}{=}\sqrt{\varkappa^{2}+12\left(b_{12}\right)^{2}+12\left(b_{34}\right)^{2}}=const.$

Переход к первому каноническому виду (0.4) означает, что нужно положить $\nu=0$. Система (2.1) в этом случае превратится в

$$\begin{gathered}
\dot{A}'-\dot{\lambda}A'=0,\qquad \ddot{A}+\tfrac{1}{2}\left(K^{2}-A^{2}\right)=0,\\
e^{-2\lambda}\left(A''-\lambda'A'\right)-\dot{\lambda}\dot{A}+\tfrac{1}{2}\left(K^{2}-A^{2}\right)=0,\qquad A=\ddot{\lambda}+\dot{\lambda}^{2}.
\end{gathered}\tag{2.2}$$

Мы получили точно такую же систему, что и в [1, формулы 19-22] с той лишь разницей, что в роли $\varkappa$ здесь выступает постоянная K. Поэтому в случае $A'\neq 0$ получим общее решение [1, формула 26]

$$e^{\lambda}=12\dot{\wp}\left(t+r+\beta,\frac{K^{2}}{12},\alpha\right),\qquad \alpha,\beta=const,\tag{2.3}$$

где $\wp\left(t+r\right)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса.

В случае $A'=0$, но $\dot{A}\neq 0$ решением будет [1, формула 28]

$$e^{\lambda}=12\dot{\wp}\left(t+\beta,\frac{K^{2}}{12},\alpha\right).\tag{2.4}$$

При $A' = \dot{A} = 0$ решением (2.2) является $A = \pm K = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2$. Если $\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 = K > 0$, то, полагая $e^\lambda = H$, получаем линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\ddot{H} - KH = 0$. Его очевидные решения приводят к метрике

$$\psi = -dt^2 + \cosh^2\left(\sqrt[4]{\varkappa^2 + 12\left(b_{12}\right)^2 + 12\left(b_{34}\right)^2}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2\left(\theta\right)d\varphi^2, \tag{2.5}$$

где b_{12}, b_{34}, β - произвольные постоянные. Если $\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 = -K < 0$, то

$$\psi = -dt^2 + \cos^2\left(\sqrt[4]{\varkappa^2 + 12\left(b_{12}\right)^2 + 12\left(b_{34}\right)^2}t + \beta\right)dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2\left(\theta\right)d\varphi^2. \tag{2.6}$$

Если метрика (0.4) приводится ко 2-му каноническому виду (1.3), то есть при $\lambda = 0$, то аналоги решений (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
e^\nu &= -12\wp'\left(t + r + \beta, \frac{K^2}{12}, \alpha\right), \qquad e^\nu = -12\wp'\left(r + \beta, \frac{K^2}{12}, \alpha\right), \\
\psi &= -\cos^2\left(\sqrt[4]{\varkappa^2 + 12\left(b_{12}\right)^2 + 12\left(b_{34}\right)^2}r + \beta\right)dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2\left(\theta\right)d\varphi^2, \\
\psi &= -\cosh^2\left(\sqrt[4]{\varkappa^2 + 12\left(b_{12}\right)^2 + 12\left(b_{34}\right)^2}r + \beta\right)dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2\left(\theta\right)d\varphi^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В отличие от [1], среди всех полученных решений при $K \neq |\varkappa|$ не может быть конформно-плоских метрик и метрик, конформных метрикам Эйнштейна, так как в [8] доказано, что такие метрики электромагнитного поля не допускают.

`Замечание.` Условие (1.11) не означает, что электромагнитное поле постоянно. Из (1.7) и (1.1) следует, что

$$\Phi_0^0 = -2b_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 - 2b_{34}\omega^3 \wedge \omega^4 = -2b_{12}e^{\lambda+\nu}dt \wedge dr - 2b_{34}\sigma\left(\theta\right)d\theta \wedge d\varphi.$$

Поэтому компоненты тензора Максвелла в голономном базисе зависят не только от t и r, но и от θ.

Второй случай, $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} = C = const$

В этом случае последние два уравнения (1.11) и последние два уравнения (1.12) примут вид

$$b'_{12} = -Cb_{13}e^\lambda, \qquad \dot{b}_{12} = -Cb_{23}e^\nu, \qquad b'_{34} = Cb_{24}e^\lambda, \qquad \dot{b}_{34} = Cb_{14}e^\nu. \tag{2.8}$$

Остальные уравнения (1.11) и (1.12) являются дифференциальными следствиями (2.8). Интегрируя уравнение $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} = C$, получим $\sigma = \mathrm{C}C_1e^{C\theta}$. Условие (0.2) превратится в $\varkappa = -C^2$. Поэтому 2-е и 3-е равенство (1.14) и последние два равенства (1.15) принимают вид

$$\begin{array}{ll}
4b_{12}b_{13} - C^2b_{23} - 4b_{34}b_{24} = 0, & -C^2b_{13} - 4b_{34}b_{14} + 4b_{12}b_{23} = 0, \\
4b_{12}b_{14} + 4b_{34}b_{23} - C^2b_{24} = 0, & 4b_{34}b_{13} - C^2b_{14} + 4b_{12}b_{24} = 0.
\end{array} \tag{2.9}$$

Эти равенства можно рассматривать как линейную однородную систему уравнений с неизвестными b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}. Ее определитель есть

$$\Delta = -\left(C^4 - 8b_{12}C^2 + 16\left(b_{12}\right)^2 + 16\left(b_{34}\right)^2\right)\left(C^4 + 8b_{12}C^2 + 16\left(b_{12}\right)^2 + 16\left(b_{34}\right)^2\right).$$

Если $\Delta \neq 0$, получим $b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = 0$. Тогда из (2.8) следует, что $b_{12} = const$ и $b_{34} = const$, выполняются равенства (1.11), и мы попадаем в первый случай.

При $\Delta = 0$ будет $b_{12} = \pm\frac{C^2}{4}$ и $b_{34} = 0$. Подставим эти выражения в (2.8). Если мы не хотим снова попасть в первый случай, когда выполняются (1.11), следует считать $C = 0$, отсюда $\varkappa = 0$, $\sigma = const$ и $b_{12} = 0$. Таким образом, решения, отличные от полученных в первом случае, можно получить лишь когда

$$b_{12} = b_{34} = \varkappa = 0, \qquad \sigma = const. \tag{2.10}$$

При условиях (2.10) система (1.8)-(1.9) сводится к

$$\begin{array}{ll}
e^{-\lambda}\left(b'_{13} + b_{13}\nu'\right) = e^{-\nu}\left(\dot{b}_{23} + b_{23}\dot{\lambda}\right), & e^{-\lambda}\left(b'_{14} + b_{14}\nu'\right) = e^{-\nu}\left(\dot{b}_{24} + b_{24}\dot{\lambda}\right), \\
e^{-\lambda}\left(b'_{24} + b_{24}\nu'\right) = e^{-\nu}\left(\dot{b}_{14} + b_{14}\dot{\lambda}\right), & e^{-\lambda}\left(b'_{23} + b_{23}\nu'\right) = e^{-\nu}\left(\dot{b}_{13} + b_{13}\dot{\lambda}\right).
\end{array} \tag{2.11}$$

Из уравнений (1.12)-(1.15) останутся лишь

$$\begin{gathered}
e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{A}\nu' + A'\dot{\lambda} - \dot{A}'\right) + 12\left(b_{13}b_{23} + b_{14}b_{24}\right) = 0, \qquad b_{23}b_{24} - b_{13}b_{14} = 0,\\
e^{-2\lambda}\left(A'\lambda' - A''\right) - \tfrac{1}{2}A^2 + e^{-2\nu}\dot{A}\dot{\lambda} + 6\left((b_{13})^2 + (b_{14})^2 + (b_{23})^2 + (b_{24})^2\right) = 0,\\
e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu} - \ddot{A}\right) + \tfrac{1}{2}A^2 + e^{-2\lambda}A'\nu' + 6\left((b_{13})^2 + (b_{14})^2 + (b_{23})^2 + (b_{24})^2\right) = 0,\\
e^{-2\lambda}\left(A'' - A'\lambda' + A'\nu'\right) + e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu} - \ddot{A} - \dot{A}\dot{\lambda}\right) + A^2 +\\
+12\left((b_{13})^2 - (b_{14})^2 - (b_{23})^2 + (b_{24})^2\right) = 0.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Остальные уравнения (1.12)-(1.15) являются дифференциальными следствиями (2.11) или алгебраическими следствиями друг друга.

Вычтем из 3-го уравнения (2.12) 4-е и прибавим последнее. Получим

$$(b_{13})^2 - (b_{14})^2 - (b_{23})^2 + (b_{24})^2 = 0.$$

Это равенство совместно со вторым уравнением (2.12) имеет только следующее решение

$$b_{23} = \varepsilon b_{13}, \qquad b_{24} = \varepsilon b_{14}, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{2.13}$$

В итоге система уравнений (2.11)-(2.12) примет вид

$$\begin{gathered}
e^{-\lambda}\left(b'_{13} + b_{13}\nu'\right) = \varepsilon e^{-\nu}\left(\dot{b}_{13} + b_{13}\dot{\lambda}\right), \qquad e^{-\lambda}\left(b'_{14} + b_{14}\nu'\right) = \varepsilon e^{-\nu}\left(\dot{b}_{14} + b_{14}\dot{\lambda}\right),\\
e^{-\lambda-\nu}\left(\dot{A}\nu' + A'\dot{\lambda} - \dot{A}'\right) + \varepsilon L = 0,\\
e^{-2\lambda}\left(A'\lambda' - A''\right) - \tfrac{1}{2}A^2 + e^{-2\nu}\dot{A}\dot{\lambda} + L = 0,\\
e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu} - \ddot{A}\right) + \tfrac{1}{2}A^2 + e^{-2\lambda}A'\nu' + L = 0,
\end{gathered} \tag{2.14}$$

где A вычисляется по формуле (1.3), а $L \stackrel{def}{=} 12\left((b_{13})^2 + (b_{14})^2\right)$. Умножим первое из этих равенств на $24b_{13}$, второе - на $24b_{14}$ и сложим. Получим

$$e^{-\lambda}\left(L' + 2L\nu'\right) = \varepsilon e^{-\nu}\left(\dot{L} + 2L\dot{\lambda}\right). \tag{2.15}$$

Для составления условий интегрируемости системы (2.14) запишем ее последние три уравнения в виде

$$\begin{gathered}
\dot{A}' = e^{\lambda+\nu}\varepsilon L + \dot{A}\nu' + A'\dot{\lambda},\\
A'' = e^{2\lambda}\left(L - \tfrac{1}{2}A^2\right) + A'\lambda' + e^{2\lambda-2\nu}\dot{A}\dot{\lambda},\\
\ddot{A} = e^{2\nu}\left(L + \tfrac{1}{2}A^2\right) + e^{2\nu-2\lambda}A'\nu' + \dot{A}\dot{\nu}.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Вычитая смешанные производные $\left(\dot{A}'\right)^{\cdot}$ и $\ddot{A}'$ из первого и третьего равенств (2.16) с учетом (2.15) и (2.16), получаем тождество. Вычитая смешанные производные $\dot{A}''$ и $(A'')^{\cdot}$ из первых двух равенств (2.16), снова приходим к тождеству. Это означает, что система (2.14) вполне интегрируема. Поэтому она поддается численному решению. Однако решить ее в конечном виде через какие-либо общеизвестные функции не удается.

Вывод. Уравнения Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики при наличии электромагнитного поля решаются полностью в конечном виде при $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} \neq const$. При $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{1}{\sigma} = const$ они доступны для численного решения. Впрочем, последний случай остается за рамками общепринятого понятия центрально-симметрической метрики.

3. Некоторые решения первого случая в элементарных функциях

Функция Вейерштрасса в (2.3) - это функция $\wp(t+r)$, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\dot{\wp} = \sqrt{4\wp^3 - \frac{K^2}{12}\wp - \alpha}. \tag{3.1}$$

В общем случае она не выражается через элементарные функции, но если многочлен третьей степени

$$4\wp^3 - \frac{K^2}{12}\wp - \alpha \tag{3.2}$$

имеет кратный корень, то это дифференциальное уравнение интегрируется. Поэтому можно привести частные решения в элементарных функциях. Корень этого многочлена будет кратным, если он является еще и корнем производной по $\wp$. Решая уравнение $12\wp^2 - \frac{K^2}{12} = 0$, найдем $\wp = \pm\frac{K}{12}$. Потребуем сначала, чтобы $\wp = \frac{K}{12}$ являлось корнем многочлена (3.2), и получим $\alpha = -\frac{K^3}{216}$. В этом случае

$$4\wp^3 - \frac{K^2}{12}\wp - \alpha = \left(\wp + \frac{K}{6}\right)\left(2\wp - \frac{K}{6}\right)^2.$$

Теперь решим дифференциальное уравнение (3.1)

$$\frac{d\wp}{\left(2\wp - \frac{K}{6}\right)\sqrt{\wp + \frac{K}{6}}} = dt.$$

Интегрирование дает

$$\wp = -\frac{K}{6} + \frac{K}{4}\left(\frac{1 + e^{\sqrt{K}(t+r+\beta)}}{1 - e^{\sqrt{K}(t+r+\beta)}}\right)^2, \qquad \beta = const.$$

Поэтому (2.3) превращается в

$$e^{\lambda} = 12\dot{\wp} = \frac{12K\sqrt{K}e^{\sqrt{K}(t+r+\beta)}\left(1 + e^{\sqrt{K}(t+r+\beta)}\right)}{\left(1 - e^{\sqrt{K}(t+r+\beta)}\right)^3}.$$

Если же считать, что корнем многочлена (3.2) является $\wp = -\frac{K}{12}$, то аналогичные вычисления приводят к

$$\wp = \frac{K}{6} + \frac{K}{4}\tan^2\left(\frac{\sqrt{K}}{2}(t+r+\beta)\right), \qquad e^{\lambda} = 12\dot{\wp} = \frac{3K\sqrt{K}\sin\left(\frac{\sqrt{K}}{2}(t+r+\beta)\right)}{\cos^3\left(\frac{\sqrt{K}}{2}(t+r+\beta)\right)},$$

$0 \le t+r+\beta \le \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Таким же образом можно получить частные решения в элементарных функциях для первой формулы (2.7).

Для решения (2.4) можно получить представление, выражающееся через элементарные функции. Для отыскания этого представления не будем прибегать к каноническому виду (0.4), а просто добавим условие $A' = 0$ к уравнениям (2.1). Они станут такими:

$$\dot{A}\nu' = 0, \qquad -\tfrac{1}{2}A^2 + e^{-2\nu}\dot{A}\dot{\lambda} + \tfrac{1}{2}K^2 = 0, \qquad e^{-2\nu}\left(\dot{A}\dot{\nu} - \ddot{A}\right) + \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{2}K^2 = 0, \tag{3.3}$$

Снова получилась такая же система, как в [1, с. 358], только в роли $\varkappa$ выступает $K = \sqrt{\varkappa^2 + 12\left(b_{12}\right)^2 + 12\left(b_{34}\right)^2}$. Поэтому и решения будут аналогичны решениям в [1]. В частности, при $\dot{A} \neq 0$, $\nu' = 0$ получим

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{3}(t+\beta)^3 - K^2(t+\beta) + \alpha, \qquad e^{2\nu} = e^{-2\lambda}. \tag{3.4}$$

При $\dot{A} = 0$ система (3.3) сводится к $A^2 = K^2$. Учитывая (1.3), получим, что

$$e^{-2\lambda}\left(\lambda'\nu' - \nu'' - \nu'^2\right) + e^{-2\nu}\left(\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\lambda}^2\right) = \pm K. \tag{3.5}$$

В каноническом представлении (0.4) уравнение (3.5) имеет решение (2.5) или (2.6).

Если же вместо условий $A' = \nu' = 0$ потребовать $\dot{A} = \dot{\lambda} = 0$, то получим решение, аналогичное тому, что было приведено в [1, формула 37]

$$e^{2\nu} = -\frac{1}{3}(r+\beta)^3 + K^2(r+\beta) + \alpha = e^{-2\lambda}, \tag{3.6}$$

α, β - константы. Это решение есть другое представление 2-го решения (2.7).

Метрику, соответствующую решению (3.6)

$$\psi = -\left(\frac{(r+\beta)^3}{-3} + K^2(r+\beta) + \alpha\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{-1}{3}(r+\beta)^3 + K^2(r+\beta) + \alpha} + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\,d\varphi^2,$$

разделим на r^2 и сделаем замену $r \to \frac{1}{r}$. Получим метрику

$$\begin{aligned}\psi = &-\left(\left(K^2\beta + \alpha - \tfrac{\beta^3}{3}\right)r^2 + \left(K^2 - \beta^2\right)r - \beta - \tfrac{1}{3r}\right)dt^2 + \\ &+ \frac{dr^2}{\left(K^2\beta + \alpha - \frac{\beta^3}{3}\right)r^2 + (K^2-\beta^2)r - \beta - \frac{1}{3r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\,d\varphi^2\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Для сравнения выпишем известное электромагнитное решение Райсснера-Нордстрема уравнений Эйнштейна

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{3.8}$$

(r_s и r_Q - константы) для центрально-симметрической метрики. Так как (3.7) есть решение уравнений Янга-Миллса, в которые электромагнитное поле входит совсем не так, как постулировали связь гравитации с электромагнетизмом Райсснер и Нордстрем, подставив в правую часть уравнений Эйнштейна тензор энергии-импульса электромагнитного поля, то нельзя рассчитывать на что-либо общее в метриках (3.7) и (3.8). Однако есть любопытная аналогия. Можно проверить, что метрика (3.8) удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса (2.1) только при $r_Q = 0$, и в этом случае она является эйнштейновой метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

С другой стороны, метрика (3.7) при $\beta = -K,\ \ \alpha = \frac{2}{3}K^3$ принимает похожий вид

$$\psi = -\left(K - \frac{1}{3r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{K - \frac{1}{3r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sigma^2(\theta)\,d\varphi^2\right). \tag{3.9}$$

Но метрика (3.9) при $K \neq |\varkappa|$ не является эйнштейновой, и она, в отличие от эйнштейновой метрики, допускает электромагнитное поле. Формула (3.9) дает самое простое решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики с ненулевым электромагнитным полем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметрической метрики // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2011. No. 4 (3). С. 350–362.
2. Каган В. Ф. Теория поверхностей, т. I. Москва-Ленинград, 1947. 512 с.
3. Trunev A.P. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource]. Krasnodar KubGAU. 2012. No. 10 (84). P. 874-887. URL: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf
4. Trunev A.P. Dynamics of quarks in the hadrons metric with application to the baryon structure // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource]. Krasnodar KubGAU. 2013. No. 01 (85). P. 525–542. URL: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf
5. Trunev A.P. Dynamics of quarks in the baryons metric and structure of nuclei // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource]. Krasnodar KubGAU. 2013. No. 01 (85). P. 623–636. URL: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf

6. Trunev A.P. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource]. Krasnodar KubGAU. 2013. No. 02 (86). URL: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf
7. Trunev A.P. Preon shells and atomic structure // Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource]. Krasnodar KubGAU. 2013. No. 03 (87). URL: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf
8. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Связь уравнений Янга-Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2009. No. 2 (4). С. 432-448.

Поступила в редакцию 03.07.2013

Кривоносов Леонид Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: oxyzt2@ya.ru

Лукьянов Вячеслав Анатольевич, Нижегородский государственный технический университет, Заволжский филиал, 606520, Россия, г. Заволжье Нижегородской области, ул. Павловского, 1а.
E-mail: oxyzt@ya.ru

L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov
Solution of Yang-Mills equations for central-cymmetric metric in the presence of electromagnetic field

Keywords: curvature of the connection, Einstein equations, Maxwell's equations, Yang-Mills equations, central-symmetric metric, 4-dimensional manifold with conformal connection, Weierstrass elliptic function, Reissner-Nordstrom solution.

PACS: 04.50.Kd

Earlier we found the full solution of Yang-Mills equations for central-symmetric metric in the space with conformal torsion-free connection in the case of vanishing electromagnetic field tensor. In this paper, this problem is solved in a more general situation, in the presence of an electromagnetic field. Again, the general solution is expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. We have presented some solutions in terms of elementary functions. Also we pointed out the reason for the difference of our solutions from the well known Reissner-Nordstrom solution of Einstein equations.

REFERENCES

1. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'yanov. The Full Solution of Yang-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics. *J. SibFU, Math. and Phys.*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 350–362.

2. Kagan V.F. *Teorija poverhnostej, t. I* (The theory of surfaces. Vol. I.), Moscow-Leningrad, 1947, 512 p.

3. Trunev A.P. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations. *Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU)* [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2012, no. 10 (84), pp. 874–887. URL: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf

4. Trunev A.P. Dynamics of quarks in the hadrons metric with application to the baryon structure. *Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU)* [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2013, no. 01 (85), pp. 525–542. URL: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

5. Trunev A.P. Dynamics of quarks in the baryons metric and structure of nuclei. *Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU)* [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2013, no. 01 (85), pp. 623–636. URL: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf

6. Trunev A.P. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells. *Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU)* [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2013, no. 02 (86). URL: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf

7. Trunev A.P. Preon shells and atomic structure. *Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU)* [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2013, no. 03 (87). URL: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf

8. L.N.Krivonosov, V.A.Luk'yanov. The relationship between the Yang-Mills and Einstein and Maxwell's Equations. *J. SibFU, Math. and Phys.* 2009, vol. 2, no. 4, pp. 432–448.

Received 03.07.2013

Krivonosov Leonid Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: oxyzt2@ya.ru

Luk'yanov Vyacheslav Anatol'evich, Senior Lecturer, Department of Computer Science and General Education, Nizhny Novgorod State Technical University, Zavolzhsky branch, ul. Pavlovskogo, 1a, Zavolzhye, Nizhegorodskaya region, 606520, Russia.
E-mail: oxyzt@ya.ru