

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев¹

НЕРАВНОВЕСНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ. IV. МОДЕЛЬ ЭНЕРГОБАЛАНСА ДЛЯ СТАДИИ РАСШИРЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УСКОРЕНИЕМ

Рассмотрен процесс установления теплового равновесия на стадии произвольного ускорения Вселенной в предположении минимальной связи скалярного поля с космологической плазмой.

Ключевые слова: ранняя Вселенная, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скейлинг, космические лучи, позднее ускорение.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Общие принципы вывода уравнения энергодобаланса

В этой статье мы обобщим результаты о восстановлении термодинамического равновесия в космологической плазме, полученные в предшествующих статьях [1–3], на случай произвольного ускорения Вселенной, снимая условие энергодоминантности темной энергии и сохраняя лишь условие минимальности модели взаимодействия космологической плазмы со скалярным полем (или с другими фундаментальными полями, приводящими к ускорению расширения), предполагая, что в некоторый момент времени t_1 постепенно происходит смена ультрарелятивистской стадии расширения² на стадию расширения с ускорением. При этом, как оказывается, частные результаты, полученные в ряде предыдущих статей, являются элементами некоторых общих закономерностей процесса установления термодинамического равновесия во Вселенной. Эти закономерности мы получим в рамках строгой математической модели в наиболее общем виде, снимая несущественные ограничения, налагаемые в предыдущих работах. Далее, под *темной энергией* мы будем понимать совокупность некоторых фундаментальных полей, приводящих к ускоренному расширению Вселенной. Их природу мы обсуждать здесь не будем, так как, во-первых, она никак не влияет на результаты, а, во-вторых, в отсутствии внятных экспериментальных данных она до сих пор не достаточно ясна. Таким образом, мы не будем привязывать наши результаты к конкретным полевым моделям, здесь нам будет важно лишь уравнение состояния этой темной субстанции. Далее, под *космологической плазмой* мы будем понимать статистическую систему классических частиц различных сортов – фермионов и бозонов, описываемую системой релятивистских кинетических уравнений (подробности см. в [4]). Среди этих частиц могут быть и неравновесные, практически полностью прекратившие межчастичные взаимодействия, – такие стабильные частицы мы будем называть *реликтовыми*.

1.1. Модель материи

Для изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной, которая рассматривается в этой статье, независимые уравнения Эйнштейна (см., например, [5]) сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (1.1)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (1.2)$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (1.3)$$

где ε_p, p_p – плотность энергии и давление космологической плазмы, ε_s, p_s – плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

¹ E-mail: ignatjev_yu@rambler.ru

² через другие режимы расширения, включая, и нерелятивистскую стадию расширения

Напомним, что инвариантное ускорение Вселенной³

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (1.4)$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропии* материи, \varkappa ,⁴

$$p(\varepsilon) = \varkappa(\varepsilon)\varepsilon \quad (1.5)$$

соотношением (см., например, [8]):

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (1.6)$$

Таким образом, в этой статье будем полагать на стадии ускорения ($t > t_1$):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (1.7)$$

До этого момента эффективный коэффициент баротропии может изменяться в пределах $[1/3, -1/3]$. Согласно [1](1.16), (1.17) масштабный фактор и суммарная плотность энергии *при заданном постоянном коэффициенте баротропии* меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (1.8)$$

Используя связь (1.6), перепишем соотношения (1.8) в удобном для интерпретации виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (1.9)$$

Поскольку при любых значениях инвариантного ускорения $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$ плотность энергии пропорциональна t^{-2} , невозможно гладко сшить два этапа расширения Вселенной с различными *постоянными* значениями Ω (или \varkappa), как это мы сделали в предыдущей статье [3], сшивая ультрарелятивистский этап с инфляционным. Поэтому в этой статье мы будем полагать коэффициент баротропии \varkappa , и вместе с ним инвариантное ускорение Ω , функциями космологического времени на исследуемом диапазоне значений. Скорость изменения этих функций на некотором этапе космологического расширения должна быть сравнима или выше темпа расширения Вселенной:

$$t\dot{\varkappa} \gtrsim \varkappa, \quad \varkappa \in [1/3, -1); \quad t\dot{\Omega} \gtrsim \Omega, \quad \Omega \in [-1, 1), \quad (1.10)$$

— в противном случае невозможно обеспечить требуемый переход от режима замедления к режиму ускорения в космологический промежуток времени.

1.2. Основные предположения модели

Сформулируем *основные предположения*, которые положены в основу представленной ниже математической модели восстановления термодинамического равновесия в расширяющейся Вселенной:

1^o. Асимптотический характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий, т.е.:

- *восстановление скейлинга взаимодействий* элементарных частиц при энергиях выше *унитарного предела*:

$$\sigma|_{s>s_u} \simeq \frac{1}{s}; \quad s_u \simeq m_u^2, \quad (1.11)$$

где s — первый кинематический инвариант (см, например, [6]), m_u — масса самой тяжелой, «последней», промежуточной частицы, участвующей в четырехчастичных взаимодействиях, типа X — бозона Великого объединения,⁵

³см., например, [8]

⁴Во избежании путаницы по сравнению с работой [1] мы изменили обозначение коэффициента баротропии $\varrho \rightarrow \varkappa$, так как похожий символ ρ обозначает в [2, 3] импульсную переменную.

⁵Но это может быть и частица с массой порядка массы планкеона, в этом случае $s_u = s_0$.

- *унификация всех межчастичных взаимодействий* на основе фундаментальных постоянных G, \hbar, c при энергиях выше унитарного предела, что приводит с учетом (1.11) к формуле *универсального асимптотического сечения рассеяния* (подробности см. в [1, 7]):

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi}{s\Lambda(s)}, \quad (1.12)$$

$$\Lambda(s) = 1 + \ln^2\left(\frac{s_0}{s}\right), \quad (1.13)$$

$s_0 = 4$ - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс⁶.

2°. *Минимальность связи фундаментальных полей (темной энергии) с космологической плазмой.* Это автоматически означает, что «закон сохранения энергии» (1.13) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (1.14)$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (1.15)$$

3°. *Ультррелятивистское уравнение состояния космологической плазмы* на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (1.16)$$

4°. *Слабое отклонение от локального термодинамического равновесия компонент космологической плазмы.* Это означает малость числа неравновесных частиц в области выше унитарного предела по сравнению с полным числом равновесных частиц (см. формулы [2] (1.23) – (1.24))⁷:

$$n_{ne} \ll n_0. \quad (1.17)$$

5°. *Ультррелятивистское начало Вселенной:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (1.18)$$

1.3. Баланс энергии космологической плазмы

Из (5.7) с учетом (5.6) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (1.19)$$

где $\tilde{\varepsilon}_p$ — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (1.8) на начальной ультррелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (1.20)$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультррелятивистской компонентной материи,

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (1.21)$$

Введем далее температуру $T_0(t)$ космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени t вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы равна [1] (1.38) – (1.39):

$$\varepsilon_p^0 = \frac{N_0\pi^2}{15}T_0^4(t), \quad (1.22)$$

⁶ в универсальной системе единиц $G = \hbar = c = 1$, которая и используется в статье; в обычных единицах $s_0 = 4\hbar c^5/G$

⁷ Но это не означает малость энергии неравновесной компоненты космологической плазмы по сравнению с энергией равновесной компоненты.

где $N_0 = N_B^0 + 1/2N_F^0$ – эффективное число типов равновесных частиц (бозонов и фермионов) в плазме с температурой T_0 (см. [2] (1.30)).

Отсюда с учетом (5.10) получаем закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left(\frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.23)$$

Относительно величины N_0 – *эффективного числа типов частиц*, находящихся в термодинамическом равновесии (см. [1] (1.39)), мы будем полагать, что $N_0(t)$ – медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (1.24)$$

Пусть теперь $T(t)$ – истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а $\Delta f_a(p, t)$ – функция распределения «а»-го сорта неравновесных частиц плазмы. Тогда найдем плотности энергии равновесной ε_e , и неравновесной ε_{ne} , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N\pi^2}{15} T^4(t); \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (1.26)$$

где $N(t) = N_B + 1/2N_F$ – эффективное число типов равновесных частиц (бозонов и фермионов) в плазме с температурой $T(t)$. Выражая далее с помощью (5.12) масштабный фактор через температуру $T_0(t)$ и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную \tilde{p} ⁸

$$p = \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (1.27)$$

получим для (5.15)

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (1.28)$$

Далее, из (5.12) и (5.14) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (1.29)$$

где введена безразмерная функция, $y(t)$ – *относительная температура* [10]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (1.30)$$

Из (5.17) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (1.31)$$

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (5.10) с помощью соотношений (5.15) и (5.17) можно переписать в виде (см. [2, 10]):

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (1.32)$$

Соотношение (5.20) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели – $2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$. Заметим, что в предыдущих статьях это основное соотношение математической модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического

⁸В отличие от импульсной переменной, p , давление обозначается римским шрифтом, – p .

времени уравнение энергоданса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

2. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

2.1. Решение кинетического уравнения

Как было показано в [2, 10], кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц в ультрарелятивистской плазме имеет вид [2] (2.1):

$$p \frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{4\pi N}{3} \frac{T^2(t)}{\Lambda(pT/2)} \Delta f_a, \quad (2.1)$$

где $\Delta f_a = \Delta f_a(\tilde{p}, t)$, $\Lambda = \Lambda(s)$. Используя здесь соотношение (5.16), приведем (5.21) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{8\pi N}{3\tilde{p}\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N^{1/4})} \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} T^2(t) a(t) \Delta f_a. \quad (2.2)$$

Решая (5.22), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp \left[-\frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (2.3)$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (2.4)$$

2.2. Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем в согласии с [2] (3.5) среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени, $\langle \tilde{p} \rangle_0$,

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (2.5)$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную, ρ ,

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (2.6)$$

так, что:

$$\langle \rho \rangle_0 \equiv 1 \Rightarrow \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \quad (2.7)$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц. Таким образом, согласно (5.16), (5.26) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (2.8)$$

Фактически величина $\langle \tilde{p} \rangle_0$ является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели. Физический смысл этого безразмерного параметра – отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени⁹. В отличие от конформной импульсной \tilde{p} переменной среднее значение

⁹Сами эти величины бесконечно, но их отношение конечно.

безразмерной конформной импульсной переменной ρ в начальном распределении тождественно равно 1.

Преобразуем выражение в экспоненте (5.23), переходя к безразмерным переменным y, ρ :

$$\frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left(\frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} = 2 \left(\frac{5\pi}{18} \right)^{1/4} \frac{1}{\rho} \int_0^t \frac{N}{N_0^{1/2} \Lambda} \frac{y^2}{a} dt. \quad (2.9)$$

Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора Λ от своих аргументов, а также убывающий характер подынтегральной функции в (5.19), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$\Lambda \left(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4} \right) \simeq \Lambda(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv \Lambda_0(t). \quad (2.10)$$

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (5.19) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp \left(-\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt \right), \quad (2.11)$$

где введено обозначение

$$\xi \equiv \xi(t) = \left(\frac{5\pi}{18} \right)^{1/4} \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} \Lambda_0(t)} \approx 0.967 \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} \Lambda_0(t)} \approx \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} \Lambda_0(t)}. \quad (2.12)$$

Вводя теперь новую безразмерную временную переменную τ ,

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (2.13)$$

такую, что

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (2.14)$$

и новую безразмерную функцию $Z(\tau)$,

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

приведем решение кинетического уравнения (5.32) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (2.16)$$

Исследуем более детально *уравнение связи* (2.13) безразмерной временной переменной τ и космологическим временем t . Полагая в (2.13) степенную зависимость масштабного фактора $a(t)$ от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора ξ , получим:

$$a \sim t^\alpha, \quad (\alpha \neq 1, 0) \Rightarrow \tau \sim t^{1-\alpha}; \quad \alpha = 1 \Rightarrow \tau \sim \ln t. \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что при $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$, а при $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$. Сравнивая соотношение (2.17) с соотношениями (1.8) – (1.9), приходим к следующему важному выводу:¹⁰

$$\varkappa \geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) \Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \quad (2.18)$$

$$\varkappa < -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) \Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty. \quad (2.19)$$

¹⁰Фактически переменная τ с точностью до медленно меняющегося фактора совпадает с известной космологической временной переменной η : $ad\eta = dt$ ([5]).

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (2.16) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной $Z(\tau)$, то соотношения (2.18) – (2.19) означают, что в ультрарелятивистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как *в ускоряющейся Вселенной термодинамическое равновесие никогда строго не достигается*.

2.3. Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (2.16) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (2.20)$$

Произведем тождественное преобразование этого выражения, учитывая, что согласно определению (5.19) и уравнению энергоданса (5.20)

$$\varepsilon_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\varepsilon_{ne}^0} \varepsilon_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (2.22)$$

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной ρ (5.27) ввели новую *безразмерную функцию* $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (2.23)$$

3. Решение и исследование уравнения энергоданса

Вследствие определения (2.15) функция $Z(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (3.1)$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (3.2)$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, с учетом (2.22) – (3.1) уравнение энергоданса (5.20) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции $Z(\tau)$:

$$Z'^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) = 1 \rightarrow Z'^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) = 1, \quad (3.4)$$

решая которое с учетом соотношений (3.2) – (3.3), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(u)}} = \tau. \quad (3.5)$$

Согласно определению (2.23) функция $\Phi(Z)$ неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (3.6)$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (3.7)$$

Вычисляя первую и вторую производную по Z от функции $\Phi(Z)$, дифференцируя соотношение (2.23) по Z , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (3.8)$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (3.9)$$

Вследствие (3.8) функция $\Phi(Z)$ является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (3.7) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (3.10)$$

причем график функции $\Phi(Z)$ вогнутый. Вследствие этих свойств функции $\Phi(Z)$ уравнение $\Phi(Z) = \Phi_0$ на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение $Z = Z_0$, то есть, *отображение $Y = \Phi(Z)$ на множестве неотрицательных чисел является биективным*.

Далее, из соотношения (3.1) следует, что функция $Z(\tau)$ является монотонно возрастающей на интервале $\tau \in [0, \tau_\infty]$. Дифференцируя соотношение (3.4) по τ как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (3.11)$$

Отсюда вследствие положительности Z' (3.4) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (3.12)$$

Поэтому вследствие (3.8) и (5.18) – (5.19) получим из (3.12):

$$Z'' > 0, \quad (3.13)$$

то есть, график функции $Z(\tau)$ также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (3.13):

$$y' > 0, \quad (3.14)$$

— то есть функция $y(\tau)$ (а вместе с ней и функция $\sigma(\tau)$) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением y_0 (σ_0), а сверху — значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1]; \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (3.15)$$

Перечисленные свойства функций $y(\tau)$, $Z(\tau)$ и $\Phi(Z)$ обеспечивают биективность цепочки отображений $\tau \leftrightarrow y$, $y \leftrightarrow Z$, $Z \leftrightarrow \Phi$. В итоге, каждому значению Φ соответствует одно и только одно значение Z и одно и только одно значение τ : $\tau \leftrightarrow \Phi$. Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций $y(\tau)$ и $Z(\tau)$ с помощью уравнения энергодбаланса (3.5):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.5) и (3.16) являются параметрическим решением уравнения энергодбаланса (3.4), а вышеперечисленные свойства функций $\Phi(Z)$ и $Z(\tau)$ обеспечивают *единственность его решения*. Согласно (2.23) функция $\Phi(Z)$ полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц $\Delta f_a^0(\rho)$. Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (3.12) по τ и учтем связь (3.1) между функциями $y(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$Z''' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \Rightarrow y''y = -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2.$$

Таким образом, вследствие (3.9):

$$y'' < 0, \quad (3.17)$$

— то есть, график функции $y(\tau)$, а вместе с ним и $\sigma(\tau)$, является выпуклым. Далее, поскольку $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$, из (3.12) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (3.18)$$

— то есть, значение $\sigma = 1$ достигается асимптотически при $\tau \rightarrow \infty$. Это позволяет нарисовать качественный график функции $y(\tau)$ (Рис. 1). Конечность безразмерного времени τ_∞ приводит к установлению предельного значения функции $y(\tau)$

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (3.19)$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (3.20)$$

Согласно (2.18) – (2.19) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

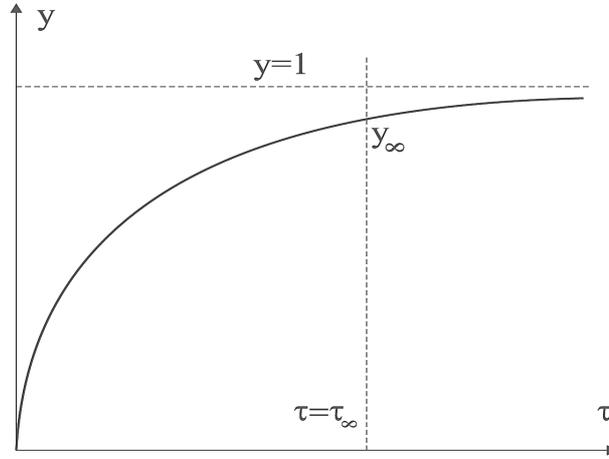


Рис. 1. Качественный вид графика функции $y(\tau)$.

4. Асимптотические свойства функции распределения сверхтепловых частиц

Таким образом, в случае ускоренно расширяющейся Вселенной в составе реликтовых частиц могут наблюдаться частицы сверхвысоких энергий, несущие информацию о начальном состоянии Вселенной. Возникает вопрос, каковы возможные параметры распределения таких частиц? Для ответа на этот вопрос необходимо исследовать асимптотическое поведение функции $Z(\tau)$ (2.15), определяющей распределение неравновесных частиц (2.16).

5. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах в ультрарелятивистской плазме в точной модели с плавным переходом на инфляционную стадию расширения

5.1. Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Построим достаточно правдоподобную модель перехода Вселенной с ультрарелятивистской стадии расширения¹¹ через нерелятивистскую на стадию позднего ускорения. Выпишем основные соотношения для рассматриваемой здесь стадии расширения:

$$\varkappa = \frac{1}{3}; \quad \Omega = -1, \quad (t \lesssim t_1); \quad (5.1)$$

$$-1 < \varkappa_f < \varkappa(t) < \frac{1}{3}; \quad -1 < \Omega(t) < \Omega_f < 1, \quad (t > t_1). \quad (5.2)$$

¹¹которая необходима вместе с нерелятивистской стадией для обеспечения производства гелия и роста гравитационных возмущений

Рассмотрим простую модель материи. Будем полагать материю состоящей из двух компонент: минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (5.3)$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p; \quad \varepsilon_p = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ne}, \quad (5.4)$$

где (см. [3]) ε_0 – плотность энергии равновесной компоненты плазмы, ε_{ne} – неравновесной, сверхтепловой. Тогда суммарный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-3\delta}{1+\delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1-\delta}{1+\delta}, \quad (5.5)$$

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (5.6)$$

Таким образом, при $\delta = \text{Const}$ формулы (5.6) можно записать в следующем удобном виде:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1+\delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (5.7)$$

Для минимально связанных моделей скалярного поля закон сохранения энергии (5.6) выполняется отдельно для скалярного поля и космологической плазмы. Поэтому вследствие (5.6) получим из него:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Xi^2}{8\pi}; \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (5.9)$$

Подставляя (5.8)-(5.9) в уравнение (1.1) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Xi} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Xi} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.10)$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Xi^2}. \quad (5.11)$$

В частности, при $t_0 = 0$ для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Xi} \sqrt{\frac{3}{32\pi} \text{sh} \frac{t}{2\Xi}}. \quad (5.12)$$

Далее, при $t \rightarrow 0$ получим из (5.12) ультрарелятивистский закон расширения:

$$a(t) = \frac{1}{\Xi} \sqrt{\frac{3t}{64\pi\Xi}}, \quad (5.13)$$

а при $t \rightarrow \infty$ - инфляционный закон расширения:

$$a(t) = \frac{1}{\Xi} \sqrt{\frac{3}{64\pi}} e^{\frac{t}{4\Xi}}. \quad (5.14)$$

Вычисляя согласно (5.6), (5.8), (5.9) и (5.12) отношение δ , найдем:

$$\delta(t) = \left(\frac{3}{16\pi\Xi} \text{sh} \frac{t}{2\Xi} \right)^2. \quad (5.15)$$

Далее, согласно (5.6) можно вычислить эффективный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение (см. Рис. 2). Как видно из рисунка, указанное точное решение реализует как раз ту

космологическую модель, о которой говорилось в работе [1] — с ультрарелятивистским стартом и поздней инфляцией.

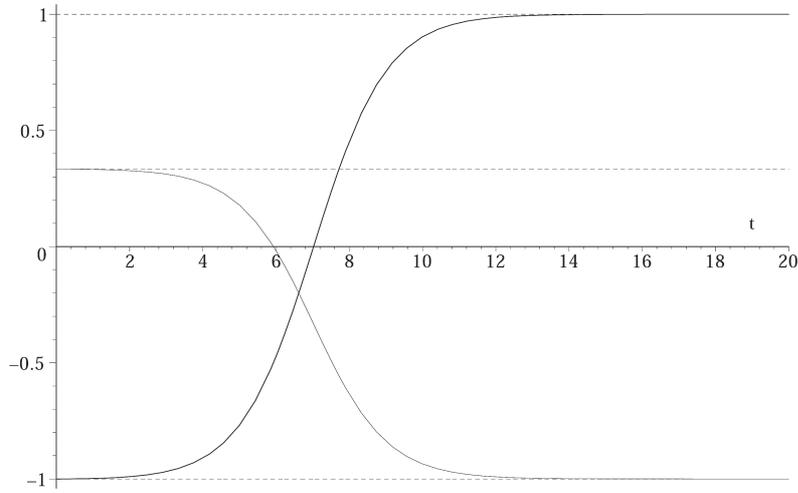


Рис. 2. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ (тонкая линия) и инвариантного ускорения $\Omega(t)$ (жирная линия) относительно точного решения (5.12) при $\Xi = 1$. Пунктирными линиями показаны асимптоты -1 ; $1/3$; 1 .

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра Ξ можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения $\kappa \rightarrow -1$. Напомним, что космологическое время t измеряется в планковских единицах.

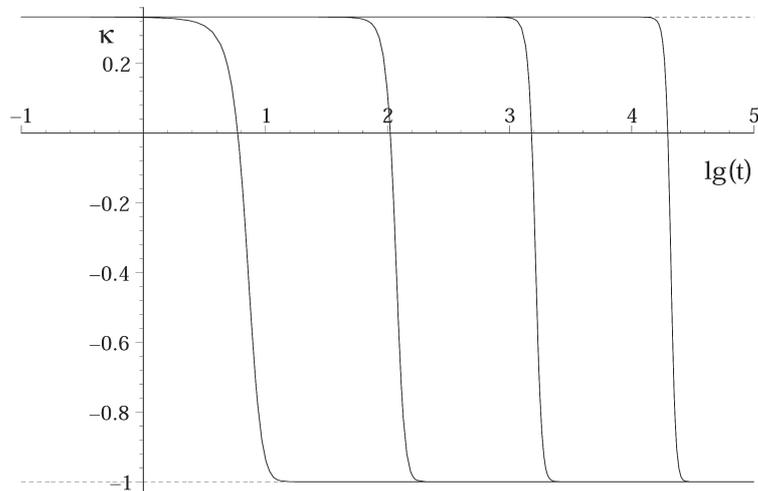


Рис. 3. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ при $\Xi = 1$; 10; 100; 1000 (слева направо) относительно точного решения (5.12). Пунктирными линиями показаны асимптоты $\kappa = -1$; $\kappa = 1/3$. Вдоль оси абсцисс отложены значения $\log_{10} t$.

5.2. Уравнение энергобаланса

Рассмотрим кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц [2](2.1) (подробности см. в [1–3]):

$$\frac{\tilde{p}}{a} \frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{4\pi\tilde{N}}{3} \frac{T^2(t)}{\Lambda(\tilde{p}T/2a)} \Delta f_a. \quad (5.16)$$

Интегрируя (5.16) с логарифмической точностью и учитывая точное решение уравнений Эйнштейна (5.14), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp \left[-\frac{\xi(t, \tilde{p})}{\tilde{p}} \int_0^t \frac{y^2(t) dt}{\sqrt{\text{sh } t/2\Xi}} \right], \quad (5.17)$$

где $\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(t_0, \tilde{p})$,

$$\xi(t, \tilde{p}) = \frac{4\tilde{N}\Xi}{\langle \Lambda \rangle \sqrt{N}}, \quad (5.18)$$

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \equiv \sigma^{1/4}(t); \quad \sigma = \left(\frac{T(t)}{T_0(t)} \right)^4 = \frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon(t)} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_0(t)}{\tilde{\varepsilon}(t)} \leq 1. \quad (5.19)$$

Далее, $T_0(t)$ – температура на данный момент времени в полностью равновесной Вселенной с масштабным фактором (5.10):

$$\tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p a^4 = \frac{N\pi^2}{15} T_0^4 a^4 = \frac{3}{32\pi} \Rightarrow T_0(t) = \frac{3\Xi}{\pi\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\text{sh } t/2\Xi}}. \quad (5.20)$$

Из соотношений (5.6), (5.8) и (5.20) получим¹² уравнение энергобаланса космологической плазмы:

$$\sigma + (1 - \sigma) \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\tilde{\varepsilon}_{ne}(0)} = 1 \quad (5.21)$$

Мы видим, что форма уравнения энергобаланса не изменяется, изменяются лишь определения входящих в него функций.

5.3. Преобразование решения кинетического уравнения

Для решения уравнения энергобаланса по аналогии с [2](3.7), [2](3.8), [3] (1.24) необходимо ввести новую безразмерную временную переменную τ , таким образом, чтобы, с одной стороны, интеграл в решении (5.18) не содержал никаких функций кроме $y(\tau)$, а с другой стороны, чтобы $\dot{\tau} > 0$. Таким образом, определим новую безразмерную временную переменную τ :

$$\tau = \frac{2\Xi \langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (5.22)$$

где

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \text{sh } t/2\Xi}{1 + \text{sh } t/2\Xi}; \quad (5.23)$$

$$\langle \xi \rangle = \xi(\langle p \rangle_0); \quad (5.24)$$

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\tilde{p} \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\tilde{p})}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\tilde{p} \tilde{p}^2 \Delta f_a^0(\tilde{p})} \quad (5.25)$$

– средняя конформная энергия неравновесных частиц в начальный момент времени; $F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл первого рода (см., например, [9]):

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (5.26)$$

Таким образом:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Xi} \frac{1}{\text{sh } \varphi} \frac{\text{ch } \varphi}{1 + \text{sh } \varphi} > 0; \quad \tau > 0; \quad \tau \in [0, t_\infty), \quad (5.27)$$

где¹³

$$t_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Xi \langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (5.28)$$

¹²Подробности см. в [2, 3].

¹³ $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$.

По аналогии с [2] введем также новую безразмерную конформную импульсную переменную:

$$\rho = \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (5.29)$$

так что

$$\frac{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}{\sum_a (2S_a + 1) \int_0^\infty d\rho \rho^2 \Delta f_a^0(\rho)} \equiv 1 \Rightarrow \langle \rho \rangle_0 \equiv 1. \quad (5.30)$$

и новую безразмерную функцию, $Z(\tau)$:

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (5.31)$$

так что

$$Z' = y^2; \quad Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}. \quad (5.32)$$

Здесь и в дальнейшем «'» означает производную по переменной τ . Введение безразмерных временной и импульсной переменных, τ, ρ , и безразмерных функций, $y(\tau)$ и $Z(\tau)$, формально сводит задачу о релаксации неравновесного распределения к уже исследованной в предыдущих работах [2, 3, 10].

5.4. Решение уравнения энергобаланса

Итак, с логарифмической точностью функция распределения неравновесных частиц (5.6) принимает вид:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (5.33)$$

Заключение

Таким образом, построенная строгая математическая модель восстановления термодинамического равновесия в инфляционной Вселенной подтвердила фундаментальность применения идеи энергобаланса к исследованию процессов установления термодинамического равновесия в расширяющейся Вселенной, а также и полученные ранее аналитические результаты. Компьютерному моделированию процесса восстановления термодинамического равновесия в инфляционной Вселенной, как и вопросам стыковки результатов, полученных на разных стадиях расширения, будет посвящена следующая наша статья.

В заключение Автор еще раз выражает благодарность профессору Мельникову В.Н. за чрезвычайно плодотворный вопрос, поставленный Автору, фактически превратившийся в постановку интересной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатъев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия. // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2012. Т. 1. No 1. С. 79–98.
2. Игнатъев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. Неравновесные кинетические модели Вселенной. II. Модель энергобаланса. // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2012. Т. 1. No 2. С. 20–36.
3. Игнатъев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. Неравновесные кинетические модели Вселенной. III. Модель энергобаланса для инфляционной стадии. // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2012. Т. 1. No 3. С. 1–5.
4. Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиантъ, 2010. 508 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
6. Pilkuhn H.M. *Relativistic Particle Physics*. 1979. New-York: Springer-Verlag. 544 p.
7. Yu.G.Ignatyev. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition. // *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No. 1(49). – pp. 1–14; arXiv:1101.0364 [gr-qc] 1 Jan. 2011.

8. Ignatyev Yu.G. and Miftakhov R.F. Cosmological evolutions of a completely degenerate fermi system with scalar interactions between particles // *Gravitation and Cosmology*. 2011, vol. 17, No. 2, pp. 190–193.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М: Физматгиз, 1963. 1100.
10. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery. // *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101–113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011.
11. Игнат'ев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. 1988. Казань: Изд-во КГПИ. С. 62–84.
12. Игнат'ев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной // *Известия ВУЗов, Физика*. 1986. Т. 29. No 2. С. 27–32.
13. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario. // *Gravitation & Cosmology*. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011.

Поступила в редакцию 09.07.2013

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Nonequilibrium Kinetics Universe Models. IV. Model of a power balance for a stage with arbitrary acceleration.

Keywords: Early Universe, Local Thermodynamic Equilibrium, Relativistic Kinetics, Scaling, Cosmic Rays, Backward Acceleration.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Process of an establishment of thermal equilibrium at a stage of any acceleration of the Universe in the assumption of the minimal connection of a scalar field with cosmological plasma is considered.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. I. Local Thermodynamics Conditions, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2012. Vol. 1. No 1. pp. 79–98.
2. Ignat'ev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. II. Energy-Balance Model, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013. Vol. 1. No 2. pp. 20–36.
3. Ignatyev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. III. Energy-Balance Model for the Inflation Stage, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013. Vol. 1. No 2. pp. 1–5.
4. Ignat'ev Yu.G. Relativistic Kinetics of Non-equilibrium Processes in a *Gravitation Fields*. 2010. Kazan: Foliant, 508 p.
5. Landau L.D., Lifshits E.M. *The theory of field*. Moscow: Nauka, 1973. 504 p.
6. Pilkuhn H.M. *Relativistic Particle Physics*. 1979. New-York: Springer-Verlag. 544 p.
7. Yu.G. Ignatyev. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition, *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No. 1(49). – pp. 1–14; arXiv:1101.0364 [gr-qc] 1 Jan. 2011.
8. Ignatyev Yu.G. and Miftakhov R.F. Cosmological evolutions of a completely degenerate fermi system with scalar interactions between particles, *Gravitation and Cosmology*. 2011, vol. 17, No. 2, pp. 190–193.
9. I.S. Grandshtein, I.M. Rizhik. *Tables of Integrals, Sums and Series*. 1963. Moskow. Fizmatgiz. 1100 p. (In Russian).
10. Ignatyev Yu.G. , Ignatyev D.Yu. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery, *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101–113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011.

11. Ignatyev Yu.G. The cosmological consequences of scalling. In *Problems of the Gravitation theory, relativistic kinetics and evolution of Universe*. 1988. Kazan: KGPI Publ., p. 62–84. (In Russian).
12. Ignat'ev Yu.G. The Capability Broken of Thermodynamic Equilibrium in Early Universe, *Izvestia Vuzov, Fizika*. 1986. Vol. 29. No 2. – p. 27–32.
13. Ignatyev Yu.G. , Ignatyev D.Yu. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario, *Gravitation & Cosmology*. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011.

Received 09.07.2013

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru