УДК 514

А. И. Долгарев,[1] И. А. Долгарев [2]

КРИВЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ПРАВОСТОРОННИМ РАСТРАНОМ

Растран – некоммутативеая алгебраическая структура. Порядок записи компонент элементов растрана влияет на свойства пространства-времени с растраном. Ниже установлено, какая из форм записи предпочтительнее.

Ключевые слова: пространство-время с растраном, левосторонний растран, правосторонний растран.

PACS: 02.40.Gh

Изучение геометрии с растраном начато в [1] в 1986 году. Первые результаты сообщены на Герценовских чтениях в Ленинграде. Алгебраическая структура растран обобщает структуру линейного пространства над полем действительных чисел. Векторы линейного пространства представляются параллельными переносами аффинного пространства, расты (элементы растрана) представляются гомотетиями и параллельными переносами аффинного пространства. Растран относится к одулям Л.В. Сабинина, [2]. Композиция двух гомотетий является либо гомотетией, либо параллельным перносом, таким образом гомотетии и переносы аффинного пространства составляют группу Ли. 3-мерный растран может быть определен на многообразии как структура с одной внутренней операцией и одной внешней операцией, эта структура некоммутативна. Для гомотетий существует операция возведения в действительную степень. По аналогии с аффинным пространством определено пространство с растраном, называемое ЛМ-пространством, оно обобщает аффинное пространство и содержит аффинные плоскости. Но имеются и растранные плоскости. Геометрия ЛМ-пространства построена в аксиоматике Г. Вейля, в которой линейное пространство заменено растраном, [1]. По аналогии с аффинными прямыми и плоскостями определены прямые и плоскости ЛМ-пространства. Уравнения прямых и плоскостей ЛМ-пространства в общем случае нелинейны.

Для растов имеется галилеево скалярное произведение, [3, с. 119–120], тем самым, в пространстве с растраном введена квазиметрика (как и в пространстве-времени Галилея). Термин квазиметрика введен в [4, с. 41]. Тем самым ЛМ-пространство превращено в ЕМ-пространство, оно относится к вейлевским одулярным пространствам – к ВО-пространствам. Простейшим случаям ВО-пространства является аффинное пространство, геометрия которого коммутативна и линейна. Рассмотренная в [5] альтернативная аффинная плоскость обладает коммутативной и нелинейной геометрией. Геометрия ЕМ-пространства некоммутативна. В [3] изучаются и другие ВО-пространства, их одули есть пододули аффинного одуля. Геометрия ВО-пространств является специфическим своеобразным разделом геометрии групп Ли, созданной Э. Картаном.

1. Однородный растран

1.1. Определение растрана

Линейное пространство L^3 над полем K может быть определено аксиоматически. Система аксиом содержит аксиомы сложения векторов, аксиомы умножения векторов на элементы поля K и аксиомы размерности. Модель линейного пространства L^3 над полем R быть построена на многообразии R^3 в результате задания операций над векторами

$$(x,y,z)+(a,b,c)=(x+a,y+b,z+c), \qquad s(a,b,c)=(sa,sb,sc), \qquad s\in R.$$

Существует несколько видов растранов, [3, с. 106–107], среди них однородный, они определены на R^3 заданием операций. В [1] выписана система аксиом однородного растрана, содержащая более 20 аксиом. Вместе с тем имеется представление растрана гомотетиями и параллельными переносами аффинного пространства, имеется арифметический однородный растран, определенный

[1]E-mail: delivar@yandex.ru
[2]E-mail: delivar@yandex.ru

операциями на многообразии R^3. Однородным растраном называется алгебраическая структура, заданная на R^3 следующими операциями

$$(u,x,y)+(v,z,w)=(u+v,xe^v+z,ye^v+w), \tag{1}$$
$$t(u,x,y)=(ut,\frac{e^{ut}-1}{e^u-1}x,\frac{e^{ut}-1}{e^u-1}y), \qquad t(0,x,y)=(0,xt,yt), \qquad t\in R.$$

Растран некоммутативен, ограничение размерности числом 3 несущественно. Тройки вида $(0,x,y)$ составляют подрастран, являющийся 2-мерным линейным пространством L^2:

$$(0,x,y)+(0,z,w)=(0,x+y,z+w).$$

Элементы растрана называются растами. Нулевым является раст $\vartheta=(0,0,0)$. Раст, противоположный расту $\rho=(u,x,y)$, равен

$$-\rho=-(u,x,y)=(-u,-xe^{-u},ye^{-u}).$$

Расты $(0,x,y)$ являются векторами. Пусть $\vec{a}=(0,a,b)$. Выполняется свойство: $-\rho+\vec{a}+\rho=(0,ae^u,be^u)$. Таким образом, раст ρ отображает вектор $\vec{a}$ на вектор $e^u\vec{a}$, является гомотетией на линейном пространстве L^2.

1.2. Расты и подобия

Рассмотрим подобие $\bar{\rho}$ плоскости, в котором точка $M=(x,y)$ отображается на точку $M'=(x',y')$:

$$\bar{\rho}:\begin{cases}x'=kx+a,\\ y'=ky+a,\end{cases} \qquad k>0,$$

если $a=b=0$, то $\bar{\rho}$ есть гомотетия с коэффициентом k; если $k=1$, то $\bar{\rho}$ вляется параллельным переносом $\vec{d}=(0,a,b)$. Пусть $\bar{\tau}$ еще одно подобие

$$\bar{\tau}:\begin{cases}x''=mx'+g,\\ y''=my'+h,\end{cases} \qquad m>0,$$

Композиция $\bar{\rho}+\bar{\tau}$ данных подобий $\bar{\rho}$ и $\bar{\tau}$ есть подобие

$$\bar{\rho}+\bar{\tau}:\begin{cases}x''=mkx+ma+g,\\ y''=mky+mb+h,\end{cases}$$

Подобию $\bar{\rho}$ поставим в соответствие тройку $\rho=(k,a,b)$ из R^3,

$$\bar{\rho}\leftrightarrow\rho=(k,a,b).$$

В этом соответствии: $\bar{\tau}\leftrightarrow\tau=(m,g,h)$ и $\bar{\rho}+\bar{\tau}\leftrightarrow(k,a,b)+(m,g,h)=(mk,ma+g,mb+h)$.

Положив $k=e^u$, $m=e^v$, имеем, что композиции подобий соответствует операция (1) сложения растов.

1.3. Расты и матрицы

Матрицы подобий $\bar{\rho}$ и $\bar{\tau}$ соответственно таковы

$$K=\begin{pmatrix}1&0&0\\ a&k&0\\ b&0&k\end{pmatrix}, \qquad M=\begin{pmatrix}1&0&0\\ g&m&0\\ h&0&m\end{pmatrix}.$$

Матрица композиции подобий $\bar{\rho}+\bar{\tau}$ есть

$$MK=\begin{pmatrix}1&0&0\\ g&m&0\\ h&0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ a&k&0\\ b&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ ma+g&mk&0\\ mb+h&0&mk\end{pmatrix}.$$

Растран представляется треугольными матрицами, но не унитреугольными. Группа унитреугольных матриц нильпотентна, она имеет нетривиальный центр. Растран центра не имеет, он разрешим, но не нильпотентен.

Произведению матриц соответствует операция на тройках из R^3, выписанная в конце предыдущего п. 1.2.

2. Дифференцирование растранных функций

2.1. Нормирование растрана

Скалярным произведением растов $\rho = (u, x, y)$ и $\tau = (v, z, w)$ называется число

$$\rho\tau = \begin{cases} uv, \text{ если } u \neq 0 \text{ или } v \neq 0; \\ xz + yw, \text{ если } u = v = 0; \end{cases}$$

см. [3, с. 120]. Это галилеево скалярное произведение растов. Нормой $|\rho|$ раста ρ называется $|\rho| = \sqrt{\rho^2}$ и

$$|\rho| = \begin{cases} |u|, \text{ если } u \neq 0; \\ \sqrt{x^2 + x^2}, \text{ если } u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Точнее, $|\rho|$ является квазинормой, т.к. она определяется двумя равенствами, см. [4, с. 41].

Смысл первой компоненты растов является временным, вторая и третья компоненты – пространственные, линейное пространство L^2 после введения нормы стало евклидовым пространством V^2. Растран обозначаем P^3.

2.2. Растранные функции

Отображение числового интервала I в растран P^3 называется растранной функцией, которая записывается в виде изменяющегося раста

$$\rho(t) = (u(t), x(t), y(t)), \qquad t \in I \subseteq R.$$

Пусть Δt – приращение аргумента функции $\rho(t)$, имеем наращенное значение $\rho(t + \Delta t)$, выполняется равенство $\rho(t + \Delta t) = \rho(t) + \Delta\rho$, где $\Delta\rho$ – приращение функции. Отсюда:

$$\Delta\rho = -\rho(t) + \rho(t + \Delta t).$$

Предел в точке t_0 растранной функции $\rho(t)$ находится покомпонентно. Для определения производной для $\rho(t)$ вычисляется отношение $\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\rho$ и отыскивается предел

$$\rho'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t}.$$

Производная, как выписанный предел, вычислена в [6]. Получена следующая формула

$$\rho'(t) = (u'(t), (e^{u'(t)} - 1)(\frac{x'(t)}{u'(t)} - x(t)), (e^{u'(t)} - 1)(\frac{y'(t)}{u'(t)} - y(t))).$$

Пусть $u(t) = t$, т.е. $\rho(t) = (t, x(t), y(t))$. В этом случае

$$\rho'(t) = (1, (e - 1)(x'(t) - x(t)), (e - 1)(y'(t) - y(t))). \tag{3}$$

Если $u(t) = const$, то $= \rho'(t) = (0, x'(t), y'(t))$; в этом случае растранная функция дифференцируется как векторная.

3. Пространство с растраном

3.1. Одулярное пространство

Как уже отмечалось, растран относится к одулям Ли [3]. Заменяя в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства линейное пространство одулем Ли, получаем вейлевское одулярное пространство, кратко ВО-пространство. Пространство с нормированным растраном называется ЕМ-пространством и обозначается M^3. Оно является некоммутативным одулярным галилеевым пространством-временем с растраном. Точками ЕМ-пространства являются тройки $M = (u, x, y)$. Для точек $A = (k, a, b)$ и M имеем

$$\overline{AM} = (u-k, x-ae^{u-k}, y-be^{u-k}), \quad |AM| = \begin{cases} |u-k|, \text{ если } u \neq k; \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \text{ если } u = k. \end{cases} \tag{4}$$

ЕМ-пространство обладает некоммутативной галилеевой геометрией. Временная составляющая 1-мерна, пространственная составляющая 2-мерна и евклидова; через всякую точку $A = (k, a, b)$. ЕМ-пространства проходит единственная евклидова плоскость, ее уравнение $u = k$.

3.2. Кривые ЕМ-пространства

Кривая ЕМ-пространства в естественной параметризации описывается функцией

$$\rho(t) = (t, x(t), y(t)), \qquad t \in I \subseteq R,$$

естественный параметр t имеет смысл времени, [3, с. 138 – 139]. Раст касательной есть (3), он имеет единичную длину. Теория кривых ЕМ-пространства изложена в [3, с. 136 – 142]. Имеем:

$$\rho''(t) = (0, (e-1)(x''-x'), (e-1)(y''-y')).$$

Кривизна кривой $\rho(t)$ вычисляется по формуле

$$k_1 = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2},$$

кручение кривой $\rho(t)$ равно

$$k_2 = \frac{(x''-x')(y'''-y'')-(y''-y')(x'''-x'')}{k_1^2}.$$

Кривая ЕМ-пространства однозначно, с точностью до положения, определяется функциями кривизны кручения [7].

4. Правосторонний растран

4.1. Еще одна запись операций на растране

Всякий раст$\rho = (u, x, y)$ представляется в виде разложения

$$\rho = (u, x, y) = u(1, 0, 0) + x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1),$$

[3, с. 108], является композицией одной гомотетии и двух параллельных переносов. Ввиду некоммутативности растрана, перестановка слагаемых в разложении растрана должна сказаться на форме записи операций над растами. От компонент u растов (u, x, y) зависят вторые и третьи компоненты суммы растов. В результате перестановки компонент изменяются и указанные зависимости. В равенствах (1) принята левосторонняя запись компонент: компонента, записанная слева, влияет на остальные компоненты.

Для растов, представленных в виде суммы переносов и гомотетий, т.е. в случае, когда влияющая компонента расположена справа, операции записываются в виде

$$(x,y,u)+(z,w,v)=(x+ze^u, y+we^u, u+v), \tag{5}$$

$$t(x,y,u)=(\frac{e^{ut}-1}{e^u-1}x, \frac{e^{ut}-1}{e^u-1}y, ut), \qquad u\neq 0; \qquad t(x,y,0)=(xt,yt,0); \qquad t\in R; \tag{6}$$

здесь имеем правостороннюю запись компонент растов. Растран с такой записью компонент называется правосторонним, а рассмотренный выше растран называется левосторонним. Обозначение правостороннего растрана – P^{3^*}.

Формулам подобия плоскости в п. 1.2 соответствуют матрицы другого вида:

$$\overline{\rho}\leftrightarrow\begin{pmatrix} k & 0 & a\\ 0 & k & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{K}, \qquad \overline{\tau}\leftrightarrow\begin{pmatrix} m & 0 & g\\ 0 & m & h\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{M}, \qquad \underline{KM}=\begin{pmatrix} km & 0 & kg+a\\ 0 & km & kh+b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Здесь имеется соответствие с операцией (5) на правостороннем растране. Можно положить: $k = e^u, m=e^v$.

Галилеева квазинорма растов определяется равенствами (2), временная компонента растов является третьей, т.е. записана справа.

Производная функция правосторонней растранной функции

$$\rho^*(t)=(x(t),y(t),u(t)), \qquad t\in I,$$

равна

$$\rho'^*(t)=(\frac{e^{u'(t)}-1}{e^{u(t)}}\frac{x'(t)}{u'(t)}, \frac{e^{u'(t)}-1}{e^{u(t)}}\frac{y'(t)}{u'(t)}, u'(t)).$$

и отлична от производной $\rho'(t)$ растранной функции в левосторонней записи растов. При $u(t)=t$ имеем формулу дифференцирования:

$$\rho'^*(t)=(\frac{e-1}{e^t}x'(t), \frac{e-1}{e^t}y'(t), 1),$$

отличную от (3); если $C=const$, то $\rho'^*=(x'(t),y'(t),0)$.

4.2. Пространство с правосторонним растраном

Аналогично с ВО-пространством с левосторонним растраном имеем ЕМ-пространство M^* с правосторонним растраном. ЕМ-пространство M^* есть множество точек с отображением пар точек в правосторонний растран: для отображения выполняются аксиомы Г. Вейля. Для точек $A = (a,b,k)$ и $M=(x,y,u)$ имеем $\overline{AM}=-\overline{OA}+\overline{OM}$ и по (4) с учетом $-(x,y,u)=(-xe^{-u}, ye^{-u}, -u)$:

$$\overline{AM^*}=((x-a)e^{-k},(y-b)e^{-k},u-k), \quad |AM|^*=\begin{cases}|u-k|, \text{ если } u\neq k;\\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}/e^k, \text{ если } u=k.\end{cases} \tag{7}$$

4.3. Кривые ЕМ-пространства M^*

В естественной параметризации регулярная кривая в M^* описывается растранной функцией

$$\rho^*(t)=(x(t),y(t),t).$$

Ее кривизна k_1^* определяется как и в пространстве с левосторонним растраном – это модуль производной второго порядка функции $\rho^*(t)$. Находим:

$$k_1^*=e^{-t}((\ddot{x}-\dot{x})^2+(\ddot{y}-\dot{y})^2)^{1/2}.$$

Кручение вычисляется как во всех галилеевых ВО-пространствах и равно:

$$k_2^* = \frac{(\ddot{x} - \dot{x})(\dddot{y} - \ddot{y}) - (\ddot{y} - \dot{y})(\dddot{x} - \ddot{x})}{(\ddot{x} - \dot{x})^2 + (\ddot{y} - \dot{y})^2}.$$

Формулы для вычисления кручения одинаковы в обоих пространствах, кривизна k_1^* отыскивается сложнее, чем в пространстве с левосторонним растраном.

5. Сравнительный анализ рассмотренных ВО-пространств

5.1. Расстояния между точками

Расстояние $|AM|$ в галилеевом пространстве с левосторонним растраном P^3 вычисляется также, как в коммутативном пространстве-времени Галилея: находится интервал времени между событиями A и M, если они не одновременны; если события одновременны, то отыскивается обычное расстояние между ними как в евклидовом пространстве, формулы (4). Расстояние $\overline{AM^*}$ в галилеевом пространстве с правосторонним растраном отыскивается иначе, формулы (6), но евклидово расстояние между одновременными событиями умножается на некоторый коэффициент, зависящий от первого события. То есть, пространственная составляющая пространства-времени M^* не вполне евклидова.

5.2. Кривизна траектории точек в M^*

Мировые линии движущейся материальной точки в галилеевом пространстве-времени M^3 и в пространстве-времени M^* есть, соответственно, $\rho(t)$ и $\rho^*(t)$. Ускорение движений точки по траектории $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ своим модулем имеет кривизну траектории k_1 или, соответственно, k_1^*. Величина ускорения зависит от того, в каком порядке рассматриваются временная и пространственная составляющие пространства-времени, см. соответствующие вычислительные формулы для кривизны.

5.3. Выводы

Рассматривается некоммутативное галилеево пространство-время с одним и тем же одулем Ли – с растраном, который представляется одулем Ли гомотетий и параллельных переносов аффинного пространства. Исследования свойств этого пространства приводят к результатам, зависящим от порядка использования гомотетий и переносов. Одуль некоммутативен и результат исследований закономерен. Следовательно, в некоммутативных геометриях и на последовательность компонент одуляров и компонент функций, задающих кривые и поверхности нужно обращать внимание. Свойства галилеева пространства-времени с левосторонним растраном более естественны. Пространственная составляющая пространства-времени евклидова и такая же как в коммутативном и линейном пространстве-времени Галилея. По нашему мнению, более целесообразно использовать левосторонний растран, как основу пространства-времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгарев А.И. ЛМ-пространство // Римановы пространства и методы эллиптических дифференциальных уравнений. Л.: ЛГПИ, 1986. – С.8–25.
2. Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. N5. С.800–803.
3. Долгарев А.И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Монография. – Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. – 306с.
4. Розенфельд Б.А., Замаховский М.П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. – М.: МЦНМО, 2003. – 560с.
5. Долгарев А.И., Долгарев И.А. Альтернативная аффинная плоскость. // Владикавказский математический журнал – Владикавказ, 2007, Т.9, вып. 4. – С. 4–14.
6. Долгарев А.И. ЕМ-пространства. Дис... канд. физ.-мат. наук, Красноярск: КГПИ, 1991. – 95 с.
7. Долгарев А.И. Натуральные уравнения кривых 3-мерных одулярных галилеевых пространств. // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 36. Межвуз. Тематич. Сб. научн. Трудов. – Калининград, РГУ, 2005. С. 31–36.

Поступила в редакцию 15.05.2013

Долгарев, Артур Иванович, к.ф.-м.н, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенского государственного университета. Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: delivar@yandex.ru

Долгарев Иван Артурович, К.ф.-м.н, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования. Пензенского государственного университета, Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: delivar@yandex.ru

A. I. Dolgarev, I. A. Dolgarev
Curved spaces with the right-handed rastran

Keywords: space-time with the rastran, left-handed rastran, right-handed rastran.

PACS: 02.40.Gh

The rastran is non-commutative algebraic structure. The order of record of components of rastran's elements influences properties of space-time with the rastran. It is established below what forms of record is more preferable.

REFERENCES

1. Dolgarev A.I. LM-space. *The Riemann spaces and methods of the elliptic differential equations*. Leningrad: LGPI, 1986. – P. 8–25. (In Russian)
2. Sabinin L.V. Odules as the new view to geometry with connectivity. *DAN USSR*. 1977. No 5. P. 800–803. (In Russian)
3. Dolgarev A.I. *The classical methods in the differential geometry of a odular spaces*. – Penza: IIC PGU, 2005. – 306 p. (In Russian)
4. Rosenfeld B.A., Zamakhovsky M.P. *The geometry of Lee's Groups. Simmetric, Parabolic and Periodic Spaces*. – Moscow.: MCNMO, 2003. – 560 p. (In Russian)
5. Dolgarev A.I., Dolgarev I.A. Alternative affine plane. *Vladicaucasus Mathematical Journal*. – Vladicaucasus, 2007, Vol. 9, No. 4. – P. 4–14. (In Russian)
6. Dolgarev A.I. *EM-spaces*. Dissertation, Krasnoyarsk: KGPI, 1991. – 95 p. (In Russian)
7. Dolgarev A.I. The natural equations of the curves of a 3-th dimention odular Galilee's spaces. *Differential geometry of the figures manifold*. Vol. 36. – Kaliningrad, RGU, 2005. P. 31–36.

Received 15.05.2013

Artur Ivanovich Dolgarev, Kandidat of Physics and Mathematics, Assistent of Professor, Penza State University, Russia, 440026, Penza, Krasnaya str. 40
E-mail: delivar@yandex.ru

Ivan Arturovich Dolgarev, Kandidat of Physics and Mathematics, Assistent of Professor, Penza State University, Russia, 440026, Penza, Krasnaya str. 40
E-mail: delivar@yandex.ru