УДК 530.12: 531.51

А. М. Баранов,[1] ***Н. Н. Паклин*** [2]

МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО СТАТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрено сферически симметричное статическое распределение идеальной жидкости. Описан метод нахождения точных решений путем введения сдвигов в пространстве решений. Исследована смена алгебраического типа пространства-времени при таких сдвигах. Представлено семейство точных решений в канонических координатах. Предложена интерпретация метода.

Ключевые слова: гравитация, идеальная жидкость, точные решения, генерация решений, алгебраическая классификация.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Jb

Введение

В работах [1]- [5] была предложена процедура генерации точных статических сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости. Действие процедуры, названной методом сдвигов, было продемонстрировано в неортогональных координатах. Было исследовано как эта процедура связана с изменением алгебраического типа пространства-времени.

Уравнения Эйнштейна удалось преобразовать к линейному виду благодаря специальному выбору метрических коэффициентов. Таким образом, было получено семейство точных решений.

В дальнейшем в [6] процедура генерации была обобщена в канонических координатах, а в качестве примера предложен другой способ записи метрических коэффициентов, приводящих уравнения Эйнштейна к линейному виду. В результате семейство точных решений значительно расширилось.

Статическое сферически симметричное гравитационное поле будем описывать в терминах метрических коэффициентов первой квадратичной формы (метрики), которую мы выберем в каноническом виде

$$ds^2 = y^2c^2dt^2 - \frac{dr^2}{z} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{0.1}$$

где $y = y(r)$, $z = z(r)$; t, r, θ, φ — время, радиальная и угловые переменные соответственно; c — скорость света.

Вещество будем описывать тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\mu + p)u_iu_k - pg_{ik}, \tag{0.2}$$

где μ - плотность энергии; p - давление; u_i - 4-скорость; g_{ik} - метрический тензор, соответствующий (0.1). Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - g_{ik}R/2 = -8\pi GT_{ik}/c^4, \tag{0.3}$$

где R_{ik} - тензор Риччи; R - след тензора Риччи (скалярная кривизна); G - постоянная тяготения Ньютона (далее положим $G = 1, c = 1$), в случае статики, сферической симметрии и идеальной жидкости представляют собой недоопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Удобно ввести новую независимую переменную $x = r^2$, тогда плотность энергии и давление явно выражаются через метрические коэффициенты и их производные по переменной x, которые будем обозначать штрихом:

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru

[2]E-mail: npaklin@sfu-kras.ru

$$8\pi\mu = \frac{1-z}{x} - 2z', \tag{0.4}$$

$$8\pi p = \frac{z-1}{x} + 4z\frac{y'}{y}, \tag{0.5}$$

а для метрических коэффициентов получается уравнение

$$4x^2zy'' + 2x^2z'y' + (1 - z + xz')y = 0. \tag{0.6}$$

Последнее уравнение относительно функции y является линейным, однородным, второго порядка, то есть. функция z считается заданной. Если в этом уравнении считать заданной функцию y, то относительно функции z получится линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$(y + 2xy')xz' + (4x^2y'' - y)z + y = 0. \tag{0.7}$$

Линейность уравнения сама по себе очень удачное обстоятельство, так как во-первых, теория таких уравнений хорошо развита, во-вторых, знание частного решения помогает находить общее решение.

Пусть, например, задана функция $z(x)$ и мы нашли частное решение $y_0(x)$, тогда общее решение можно выразить в виде квадратуры

$$y(x) = y_0(x)\left[A + B\int \frac{dx}{\sqrt{z(x)}y_0^2(x)}\right], \tag{0.8}$$

где A и B — постоянные. Если же мы задали функцию $y(x)$, то метод вариации постоянной позволяет выразить общее решение $z(x)$ виде

$$z(x) = z_0(x)[C - z_1(x)], \tag{0.9}$$

где C - постоянная, а функции $z_0(x)$ и $z_1(x)$ выражаются через квадратуры как

$$z_0 = \exp\int \frac{y - 4x^2y''}{y + 2xy'}\frac{dx}{x}; \quad z_1 = \int \frac{y}{z_0(y + 2xy')}\frac{dx}{x}. \tag{0.10}$$

1. Метод сдвигов

Точное статическое сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости определяется парой функций (y, z). Пусть нам известно частное решение (y, z), например, для плоского пространства-времени пара $(y = 1, z = 1)$. Зафиксируем функцию z и найдем более общее решение для функции $\bar{y}$, в итоге получим другое точное решение $(\bar{y}, z)$. Произошел сдвиг в пространстве решений. Для краткости назовем его y-сдвигом. Если нам удалось получить общее решение для функции y, то дальнейшая процедура замкнется и y-сдвиг превратится в тождественное преобразование. Если зафиксировать функцию y и найти более общее решение для функции $\bar{z}$, то получим еще одно точное решение $(y, \bar{z})$. Такое преобразование назовем z-сдвигом. Точные решения $(\bar{y}, z)$ и $(y, \bar{z})$ можно использовать для получения новых точных решений. Применим y-сдвиг к паре $(y, \bar{z})$, в результате получим пару $(\tilde{y}, \bar{z})$. Применим z-сдвиг к паре $(\bar{y}, z)$, в результате получим пару $(\bar{y}, \tilde{z})$. Вообще говоря, $(\tilde{y}, \bar{z}) \neq (\bar{y}, \tilde{z})$, то есть сдвиги не коммутируют.

Применяя сдвиги поочередно к различным частным решениям можно получать семейства заведомо точных решений. Следует отметить, что физический смысл таких решений нужно исследовать дополнительно. Некоторые решения обладают сингулярностями, а некоторые вообще лишены физического смысла. Однако решение, полученное из нефизического решения, может обладать физическим смыслом. Следовательно, каждое точное решение представляет интерес, хотя бы как затравочное.

2. Обобщение метода сдвигов

Из формулы (0.9) видно, что общее решение для функции $z(x)$ содержит одну постоянную интегрирования C. Если после z-сдвига постоянную интегрирования устремить к нулю, $C \to 0$, то произойдет предельный переход (обратный z-сдвиг): $\lim\limits_{C\to 0} z(x) = z_0(x)$, поэтому назовем его для краткости C-сдвигом.

Из формулы (0.8) видно, что общее решение для функции $y(x)$ содержит две постоянные интегрирования A и B. Если после y-сдвига постоянную интегрирования B устремить к нулю, то произойдет предельный переход: $\lim\limits_{B\to 0} y(x) = Ay_0(x)$, где $Ay_0(x) = y_1(x)$ — частное решение, для краткости назовем этот предельный переход B-сдвигом. Если после y-сдвига постоянную интегрирования A устремить к нулю, то произойдет другой предельный переход: $\lim\limits_{A\to 0} y(x) = y_2(x)$, где $y_2(x)$ — другое частное решение. Назовем для краткости этот предельный переход A-сдвигом. Обратный y-сдвиг получается в результате двойного предельного перехода

$$\lim_{B\to 0}\lim_{A\to 1} y(x) = y_0(x). \tag{2.1}$$

Сдвиги и пределы коммутируют.

Очень удобно дополнить сдвиги такими предельными переходами, это позволяет получать больше точных решений и устанавливать связи между решениями, которые не были связаны сдвигами. Например, сдвиги часто приводят к квадратурам, не выражающимся через элементарные функции и содержащим несколько параметров. Предельный переход по одному из параметров позволяет выразить квадратуру через элементарные функции, а дальнейшие сдвиги дают новые решения.

Семейство точных решений, полученное обобщенным методом сдвигов, можно представить в виде двумерной (плоской) диаграммы (таблицы). Дадим этому семейству условное название «слой». Можно дополнить обобщенный метод сдвигов множеством точечных преобразований независимой переменной r и метрических коэффициентов g_{ik}. В результате точечных преобразований $(r, g_{ik}) \to (\bar{r}, \bar{g}_{ik})$ уравнения тяготения могут изменить свой вид. Применяя обобщенный метод сдвигов к новым уравнениям, будем получать новые слои. Эти новые семейства представляют собой те же точные решения, но переписанные в новых координатах. Таким образом, переход между слоями изменяет аналитическую форму записи точного решения, не меняя его физических свойств (в том числе и алгебраического типа гравитационного поля).

Точное решение в одном из слоев может выражаться через специальные функции или сложные квадратуры, а переход в другой слой позволит выразить это же решение через элементарные функции. В этом и заключается смысл точечных преобразований, хотя новая точка зрения на проблему имеет самостоятельный интерес.

Если снабдить множество точечных преобразований параметром и потребовать выполнение аксиом группы, то переход между слоями будет непрерывным. Пространство решений в окрестности слоя приобретет структуру расслоенного многообразия, где роль базы будет играть групповой параметр.

В случае группы симметрии (в смысле теории групп Ли) уравнение не меняет вида и мы остаемся в пределах данного слоя. Метод групп Ли будет дополнять метод сдвигов, во многом пересекаясь с его результатами.

3. Применение обобщенного метода сдвигов

В качестве примера рассмотрим семейство решений, соответствующих метрике (0.1).

Начнем с внешнего решения Шварцшильда

$$y^2 = z = 1 - 2m/r, \tag{3.1}$$

$\mu = 0,\ p = 0$ (вакуум). Предельный переход $m \to 0$, соответствует C-сдвигу и B-сдвигу одновременно, в результате получается плоское решение

$$y = z = 1, \tag{3.2}$$

$\mu = 0,\ p = 0$ (вакуум). z-Сдвиг внешнего решения Шварцшильда дает сингулярное решение

$$y^2 = 1 - 2m/r,\ z = 1 - 2m/r - C(r^2 - 4mr + 5m^2 - 2m^3/r), \tag{3.3}$$
$$8\pi\mu = (r-m)(3r-5m)C/r^2,$$
$$8\pi p = -(r-m)^2 C/r^2.$$

Предельный переход $m \to 0$ из этого решения соответствует C-сдвигу и дает решение, известное как «статическая вселенная Эйнштейна», которое получается так же, как z-сдвиг из плоского решения:

$$y = 1,\ z = 1 - Cr^2,\ 8\pi\mu = C,\ 8\pi p = -C/3. \tag{3.4}$$

Это однородная статическая модель вселенной с уравнением состояния $p = -\mu/3$.

Теперь применим y-сдвиг к внешнему решению Шварцшильда:

$$z = 1 - 2m/r;\ y = A\sqrt{z} + B\left[r^2 + 5mr - 30m^2 + 15\sqrt{z}m^2 \ln\left(r - m + r\sqrt{z}\right)\right], \tag{3.5}$$

для этого решения $\mu = 0$, а $p \neq 0$, то есть без космологической постоянной физический смысл вообще отсутствует, с учетом же космологического члена: $8\pi\mu = \Lambda$, а $8\pi p + \Lambda < 0$. Предельный переход $m \to 0$ из этого решения соответствует C-сдвигу и дает решение, которое получается так же, как y-сдвиг из плоского решения:

$$y = A + Br^2,\ z = 1. \tag{3.6}$$

Данному решению физический смысл можно придать только с учетом космологической постоянной: $8\pi\mu = \Lambda$, $8\pi p = 4B/(A + Br^2) - \Lambda$.

z-Сдвиг решения (3.5) дает выражение вида (0.9) со сложными квадратурами вида (0.10), в которых функция y берется из (3.5). Предельный переход $B \to 0$ преобразует это сложное выражение в (3.3), а предельный переход $m \to 0$ приводит к решению Адлера

$$y = A + Br^2,\ z = 1 - Cr^2/(A + 3Br^2)^{2/3}, \tag{3.7}$$
$$8\pi\mu = C(3A + 5Br^2)/(A + 3Br^2)^{5/3},$$
$$8\pi p = (A + Br^2)^{-1}\left[4B - C(A + 5Br^2)/(A + 3Br^2)^{2/3}\right].$$

Решение Адлера получается так же, как z-сдвиг из (3.6). Предельный переход $A \to 0$ переводит решение Адлера в сингулярное решение

$$y = Br^2,\ z = 1 - Cr^{2/3},\ 8\pi\mu = c/r^{4/3},\ 8\pi p = 4/r^2 - 3c/r^{4/3}. \tag{3.8}$$

Если применить к решению Адлера y-сдвиг, то получим решение вида (0.8), которое выражается через эллиптические интегралы Лежандра. В отличие от решения Адлера это обобщенное решение позволяет на границе шара обратить в ноль плотность массы: $\mu(R) = 0$.

Применим y-сдвиг к решению (3.3), в результате получим сингулярное решение вида (0.8), выражающееся через эллиптические интегралы Лежандра. Предельный переход $B \to 0$ переводит его в (3.5), а предельный переход $m \to 0$ дает «внутренее решение Шварцшильда»

$$z = 1 - Cr^2,\ y = A - B\sqrt{z},\ 8\pi\mu = 3C,\ 8\pi p = C(A - 3B\sqrt{z})/(A - B\sqrt{z}), \tag{3.9}$$

которое можно получить как y-сдвиг из «статической вселенной Эйнштейна» (3.4).

Предельный переход $A \to 0,\ B \to 1$ преобразует (3.9) в решение де Ситтера

$$z = y^2 = 1 - Cr^2,\ 8\pi\mu = 3C,\ 8\pi p = -3C. \tag{3.10}$$

Это однородная статическая модель вселенной с уравнением состояния $p = -\mu$.

z-Сдвиг решения (3.10) дает решение, известное как «четвертое решение Толмена» (Толмен-4)

$$y^2 = A + Br^2,\ z = (1 + Cr^2)(A + Br^2)/(A + 2Br^2), \tag{3.11}$$
$$8\pi\mu = (B - AC - CBr^2)/(A + 2Br^2) + 2AB(1 + Cr^2)/(A + 2Br^2)^2,$$
$$8\pi p = (B + AC + 3CBr^2)/(A + 2Br^2).$$

y-Сдвиг решения (3.11) дает решение вида (0.8), которое выражается через эллиптические интегралы Лежандра. В отличие от решения Толмен-4 это обобщенное решение допускает на границе шара обращение плотности массы в ноль: $\mu(R)=0$.

Если применить z-сдвиг к внутреннему решению Шварцшильда, то получим решение вида (0.9) со сложными квадратурами вида (0.10), где функция y берется из (3.9). В пределе $A\to 0$ это решение дает (3.11).

Решение (3.4) можно получить как предельный переход $n\to 0$ из «пятого решения Толмена» (Толмен-5)

$$y=Ar^n,\ z=1/a-br^c,\ c=2a/(1+n),\ a=1+2n-n^2, \tag{3.12}$$

$$8\pi\mu=[a-1+ab(c+1)r^c]/ar^2,\ 8\pi p=[2n+1-a-ab(2n+1)r^c]/ar^2.$$

Само решение (3.12) допускает обобщение посредством y-сдвига:

$$z=1/a-br^c,\ y=r\left[A\cdot P(\alpha,\beta,\sqrt{1-abr^c})+B\cdot Q(\alpha,\beta,\sqrt{1-abr^c})\right], \tag{3.13}$$

$$\alpha=(-c+\sqrt{32-16c+c^2})/2c,\ \beta=2\sqrt{2-a}/c.$$

Здесь A,B – постоянные, P,Q – обобщенные функции Лежандра. В пределе $n\to 0$ (3.13) переходит в (3.9).

Решение (3.6) можно получить как предельный переход $n\to\pm 1$ из «шестого решения Толмена» (Толмен-6)

$$z=1/(2-n^2),\ y=r(A/r^n+Br^n), \tag{3.14}$$

$$8\pi\mu=\left(\frac{n^2-1}{n^2-2}\right)\frac{1}{r^2},\ 8\pi p=\frac{A(n-1)^2+(n+1)^2Br^{2n}}{(n^2-1)(A+Br^{2n})r^2}.$$

Если $n\neq 0$, то решение (3.14) не допускает обобщения посредством y-сдвига. Если $n=0$, то y-сдвиг решения (3.14) дает сингулярное решение

$$y=r(A+B\ln(r)),\quad z=\frac{1}{2},\quad 8\pi\mu=\frac{1}{2r^2},\quad 8\pi p=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{A+B\ln(r)}\right). \tag{3.15}$$

Если применить z-сдвиг к решению (3.14), то получим решение вида (0.9) со сложными квадратурами вида (0.10), где функция y берется из (3.14). Это обобщенное решение в пределе $n\to\pm 1$ дает решение (3.7), в остальных случаях получаются сингулярные решения.

4. Изменение алгебраического типа пространства-времени

Из выше приведенного списка точных решений уравнений тяготения, полученных с помощью сдвигов, видно, что эти решения могут отвечать гравитационным полям разных алгебраических типов по классификации Петрова [7]. Рассмотрим возможность смены алгебраического типа гравитационного поля при сдвигах, введенных в работах [1] - [5].

Статические сферически симметричные решения уравнений тяготения могут относиться лишь к двум типам по алгебраической классификации Петрова [7]: $\boldsymbol{O}$ или $\boldsymbol{D}$, как это было показано в [8] - [9]. Однако принадлежность того или иного решения уравнений Эйнштейна к определенному типу пространства-времени связана с законом распределения плотности вещества.

Тензор Вейля

$$W_{ijkl}=R_{jikl}+g_{i[k}R_{l]j}-R_{i[k}g_{l]j}-(R/3)g_{i[l}g_{k]j}, \tag{4.1}$$

можно отобразить на 3-мерное комплексное евклидово пространство (квадратные скобки обозначают антисимметризацию по индексам). В итоге для статики получим диагональную бесследовую матрицу Вейля

$$W=diag(W_{11},W_{22},W_{33}), \tag{4.2}$$

где

$$-\frac{i}{2}W_{11} = W_{22} = \bar{W}_{33}, \tag{4.3}$$

черта сверху здесь обозначает комплексное сопряжение, а $i^2 = -1$. Таким образом, пространство-время относится к алгебраическому типу $\boldsymbol{D}$, если $W_{11} \neq 0$, и к типу $\boldsymbol{O}$, если $W_{11} = 0$.

Алгебраическая классификация гравитационных полей связана с решением кубического характеристического уравнения

$$\lambda^3 + P\lambda + Q = 0, \tag{4.4}$$

где коэффициенты P и Q находятся по заданной матрице Вейля и равны $P = (-3/4)W_{11}^2,$, $Q = (1/4)W_{11}^3$.

Уравнение (4.4)можно рассматривать как условие экстремума для «потенциальной» функции

$$V(\lambda, P, Q) = (1/4)\lambda^4 + (P/2)\lambda^2 + Q\lambda. \tag{4.5}$$

Согласно классификации Тома [10] функция $V(\lambda, P, Q)$ описывает катастрофу сборки Уитни. В плоскости управляющих параметров P , Q точка сборки ($P = Q = 0$) соответствует фазовому переходу в алгебраический тип $\boldsymbol{O}$ (наиболее симметричную фазу) по аналогии с теорией Ландау фазовых переходов второго рода . Отметим, что параметр P аналогичен температуре; $\partial V/\partial P$ – энтропии; $\partial^2 V/\partial P^2$ – теплоемкости. Однако у матриц имеется «собственная» характеристика (ранг матрицы), которая при смене алгебраического типа ведет себя как теплоемкость твердого тела при фазовых переходах второго рода. При этом «фазами вещества» выступают типы гравитационных полей. В нашем случае уравнение $\lambda^3 + P\lambda + Q = 0$ имеет три вещественных корня: $\lambda_1 = -W_{11}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = W_{11}/2$. Обращение в ноль дискриминанта $P = -3(Q/2)^{2/3}$ задает полукубическую параболу (рис.1), отвечающую пространству типа $\boldsymbol{D}$.

Подставляя корни кубического уравнения в функцию $V(\lambda, P, Q)$, получим экстремальные значения этой функции, выраженные через управляющий параметр P :

$$V(\lambda_1, P) = -2P^2/3, V(\lambda_2, P) = V(\lambda_3, P) = P^2/12. \tag{4.6}$$

В точке $P = Q = 0$ наблюдаются скачки вторых производных по параметру от функции $V(\lambda, P, Q)$: $\Delta(\partial^2 V/\partial P^2) = 1/6$ и $\Delta(\partial^2 V/\partial P^2) = -4/3$, что отвечает скачку ранга матрицы Вейля в точке сборки с трех до нуля.

Следовательно, непрерывное стремление параметров P и Q к нулю приводит к катастрофе: тип пространства меняется скачком ($\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{O}$).

После общего рассмотрения возможности скачкообразного изменения типа пространства-времени перейдем к более детальному исследованию. Для этого возьмем метрику в виде, как это сделано в [5],

$$ds^2 = zy^2 dt^2 - \frac{dr^2}{z} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4.7}$$

С учетом уравнений Эйнштейна элемент W_{11} матрицы Вейля может быть записан как

$$W_{11} = \frac{2}{3}\Big(z' + \frac{(1-z)}{x}\Big), \tag{4.8}$$

где штрихом по-прежнему обозначена производная по переменной $x = r^2$.

Уравнение (0.4) можно переписать как

$$8\pi\mu(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\Phi)', \tag{4.9}$$

где $\Phi = 1 - z$ – ньютоновский гравитационный потенциал или

$$\Phi = \frac{4\pi}{\sqrt{x}}\int \mu\sqrt{x}dx = \frac{8\pi}{r}m(r), \tag{4.10}$$

где $m(r)$ – текущая внутренняя ньютоновская масса.

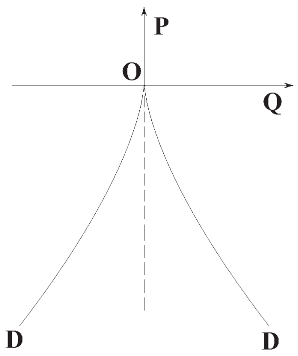

Рис. 1. Проекция катастрофы сборки Уитни на плоскость управляющих параметров P и Q.

Тогда (4.8) принимает вид

$$W_{11} = \frac{8\pi}{3}\mu(x) + \frac{\Phi(x)}{x}. \tag{4.11}$$

В любом случае функция z (или Φ) связана непосредственно с выбором функции плотности массы μ. Поэтому тип пространства ($\boldsymbol{O}$ или $\boldsymbol{D}$) зависит от функции z и оказывается никак не связанным с изменением функции y. Другими словами, алгебраический тип пространства времени меняется при z-сдвигах.

Для того чтобы установить, при каких функциях z пространство-время будет иметь тип $\boldsymbol{O}$, необходимо в (4.8) приравнять W_{11} нулю. Интегрируя получившееся уравнение, находим, $z = 1 + C_0 x \equiv 1 + C_0 r^2$, где C_0 – постоянная интегрирования. Это соответствует однородному распределению вещества и, в частности, описывается внутренним решением Шварцшильда.

Результаты

Изложенные результаты наглядно представлены в виде диаграммы на рис.2.

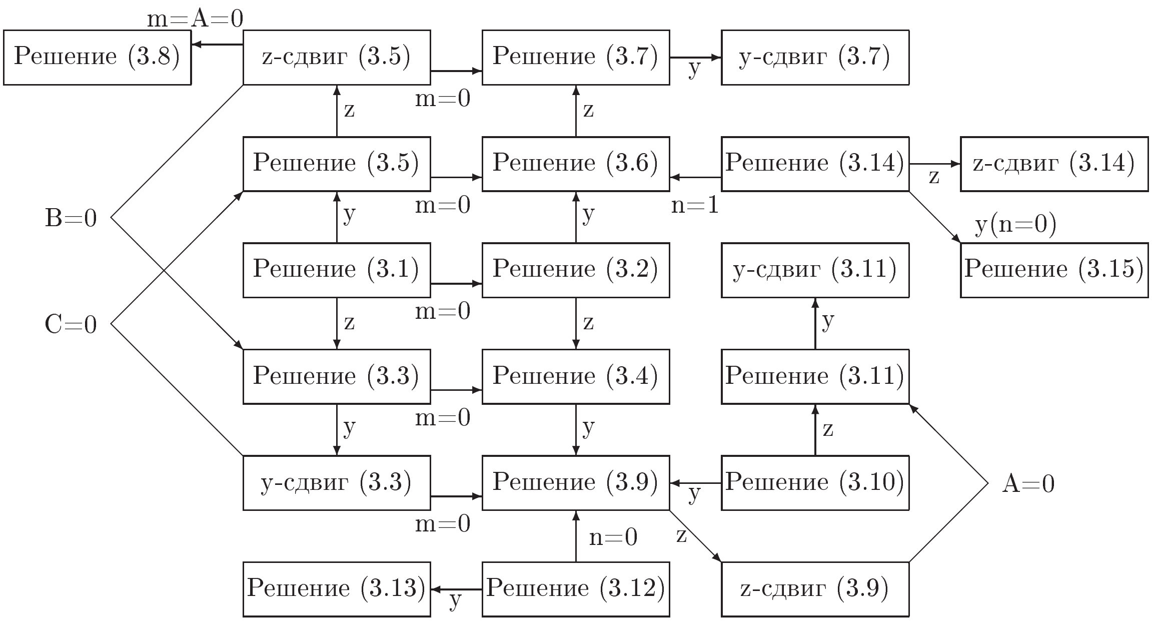

Рис. 2. Наглядная схема цепочек сдвигов и пределов, показывающих переходы от одних точных решений к другим

На рис.2 изображены не все возможные переходы. Если учесть коммутативность сдвигов и пределов, то решения, связанные опосредованно, можно соединить прямыми переходами.

Заключение

Следует отметить, что первым, кто записал статические сферически симметричные уравнения Эйнштейна в линейном виде, был по-видимому Buchdahl (1959) [11]. Метод сдвигов, в линейном случае, был использован в работе Heintzmann (1969) [12]. С тех пор многие авторы использовали этот метод в различных вариантах.

Предложенный в данной работе метод пригоден и для нелинейных уравнений. Например, в гидродинамике, если не задано уравнение состояния. Другой пример, общековариантные или калибровочные теории поля. Но именно линейный вид уравнений позволяет использовать метод сдвигов в полной мере.

Что касается интерпретации метода, то более всего уместна геометрическая интерпретация в терминах математических категорий и функторов. Имеется в виду категория групповых орбит, которые применяются в терии групп Ли для описания преобразований одних точных решений в другие. Хотя в методе сдвигов не используются явно термины теории групп Ли, этот метод тесно связан с симметриями уравнений, а постоянные интегрирования совпадают с групповыми параметрами. Функторы как отображения между категориями описывают переход от одних сдвигов к другим. Очевидно, что в методе сдвигов можно поменять ролями категории и функторы. Подобная геометрическая интерпретация имеет место в любых недоопределенных системах дифференциальных уравнений, что позволяет утверждать о применимости метода сдвигов и в других разделах физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Генерирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения. 1.Изменение алгебраического типа пространства /Красноярский государственный университет. Красноярск, 1988. 10 с. Деп. ВИНИТИ 20.09.88, №7037–В88.

2. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Генерирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения. 2. Получение решений /Красноярский государственный университет. Красноярск, 1988. 14 с. Деп. ВИНИТИ 20.09.88, №7038–В88.

3. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Генерирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения. 3. Суперпозиция и конструирование метрик /Красноярский государственный университет. Красноярск, 1988. 7 с. Деп. ВИНИТИ 14.11.88, №8040–В88.

4. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Генерирование и конструирование статических сферически симметричных решений уравнений тяготения // Известия вузов. Физика. 1990. №6. С. 5–9;
Baranov A.M., Paklin N.N. Generation and construction of statistical spherically symmetric solutions of the gravitational equations // Rus.Phys.Journal. 1990. V.6. No.6. P.463–467.

5. Баранов А.М., Паклин Н.Н. О генерировании сферически симметричных статических решений уравнений тяготения и изменении алгебраического типа гравитационного поля // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2005. №7. С. 24–29.

6. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Обобщение метода генерации статических сферически симметричных решений уравнений тяготения // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2006. №7. С. 4–8.

7. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.

8. Баранов, Чешель А.А. Алгебраический тип сферически симметричного поля // Материалы V Сов. Грав. конф. Москва, 1981. С.107.

9. Баранов А.М. Об алгебраическом типе сферически симметричного гравитационного поля // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2006. №1. С. 5–9.

10. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.

11. Buchdahl H.A. General relativistic fluid spheres // Phys. Rev. 1959. Vol. 116. №4. P. 1027–1034.

12. Heintzmann H. New exact static solutions of Einsteins field equations // Z. Physik. 1969. Vol. 228. P. 493-489.

Поступила в редакцию 01.06.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Паклин Николай Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, Институт инженерной физики и радиоэлектроники, Сибирский федеральный университет, 660074, Россия, г. Красноярск, ул. Киренского, д. 26.
E-mail: npaklin@sfu-kras.ru

A. M. Baranov, N. N. Paklin

Method of generating solutions of Einstein's equations for spherically symmetric static distribution of perfect fluid

Keywords: gravitation, perfect fluid, exact solutions, generation of solutions, algebraic classification.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Jb

The perfect fluid's spherical static distribution inside of gravitating ball is considered. A method of exact solutions finding and ways of its generalization is described. The metric coefficients' transformation to spherical coordinates leads to a linear form of the Einstein equations. A linearity of the field's equations supposes generalization of particular solutions into solutions with new physical properties. Two types of the solution space shifts are introduced. The procedure of deriving of the exact solutions from well-known solutions of gravitational equations is suggested. The change of algebraic type of space-time under such shifts is investigated. This change of algebraic type is connected with the mass distribution and with one of shifts in the solution space. The set of exact solutions in canonical coordinates is submitted. An interpretation of the method is presented.

REFERENCES

1. Baranov A.M., Paklin N.N. Generation of static spherically symmetric solutions of gravitational equations. 1. Change of algebraic type of space, Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, 1988, 10 p. Deposited in VINITI 20.09.88, no. 7037–B88.

2. Baranov A.M., Paklin N.N. Generation of static spherically symmetric solutions of gravitational equations. 2. Deriving of solutions, Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, 1988, 14 p. Deposited in VINITI 20.09.88, no. 7038–B88.

3. Baranov A.M., Paklin N.N. Generation of static spherically symmetric solutions of gravitational equations. 3. Superposition and construction of metrics, Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, 1988, 7 p. Deposited in VINITI 14.11.88, no. 8040–B88.

4. Baranov A.M., Paklin N.N. Generation and constraction of statical spherically symmetric solutions of gravitational equations, *Izvestya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika*, 1990, no. 6, pp. 5–9;
Baranov A.M., Paklin N.N. Generation and construction of statistical spherically symmetric solutions of the gravitational equations, *Rus.Phys.Journal*, 1990, vol.6, no.6, pp.463–467.

5. Baranov A.M., Paklin N.N. On generation of spherically symmetric statical solutions of the gravitational equations and a change of gravitational field's algebraic type, *Vestnik of Krasnoyarsk State University (Phys. and Math. Sci.)*, 2005, no.7. pp. 24–29.

6. Baranov A.M., Paklin N.N. An extension of generation method of static spherical solutions of the gravitation equations, *Vestnik of Krasnoyarsk State University (Phys. and Math. Sci.)*, 2006, no. 7. pp. 4–8.

7. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p.

8. Baranov A.M., Cheshel A.A. Algebraic type of spherically symmetric field Алгебраический тип сферически симметричного поля *Abstracts of V Sov. Grav. conf.*, Moscow,1981, p.107.

9. Baranov A.M. On algebraic type of spherically symmetric gravitational field *Vestnik of Krasnoyarsk State University (Phys. and Math. Sci.)*, 2006, no.1. pp. 4–8.

10. Poston T., Stewart I. *Catastrophe theory and its applications.* London-San Francisco-Melbourne: Pitman, 1978, 580 p.

11. Buchdahl H.A. General relativistic fluid spheres, *Phys. Rev.*, 1959, vol. 116, no. 4, pp. 1027–1034.

12. Heintzmann H. New exact static solutions of Einsteins field equations, *Z. Physik.*, 1969, vol. 228, pp. 493-489.

Received 01.06.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Sibrian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Paklin Nickolay Nickolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Siberian Federal University, 79 Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: npaklin@sfu-kras.ru