

УДК 530.12

*А. И. Егоров,¹ П. Е. Кашаргин,² С. В. Сушков³***СКАЛЯРНЫЕ МУЛЬТИКРОТОВЫЕ НОРЫ**

Методом суперпозиции построено аксиально симметричное решение, описывающее n кротовых нор в общей теории относительности с фантомным скалярным полем. Пространство-время мультикротовых нор имеет сложную топологическую структуру, в частности оно обладает 2^n различными асимптотически плоскими областями.

Ключевые слова: общая теория относительности, кротовые норы, скалярное поле.

PACS: 04.20.-q

Введение

В общей теории относительности известны решения уравнений Эйнштейна, которые интерпретируются как гравитационное поле, создаваемое двумя и более точечными массами [1–4] (см. обзоры [5, 6]). Кайгородовым в работе [3] был предложен следующий подход для получения метрики двух точечных масс: необходимо взять решение Шварцшильда для одного центра, перевести его в осесимметричную вейлеву систему координат (0.8), затем в этой системе координат сдвинуть гравитационный заряд по оси z , сделав замену $z \rightarrow z - z_i$ и получив таким образом поле точечного заряда, находящегося в точке z_i . Решение для двух точечных масс можно получить из принципа суперпозиции, складывая гравитационные потенциалы частиц, находящихся в точках z_1 и z_2 . Этот подход может быть применен также для построения многочастичных решений с электрическими зарядами [7]. В нашей работе данный подход будет использован для построения решения, описывающего несколько кротовых нор в теории гравитации со скалярным полем.

Кротовыми норами в физической литературе называют туннели, связывающие удаленные области Вселенной или «мосты» соединяющие различные вселенные. На сегодняшний день кротовым норах посвящена обширная литература: впервые подобные решения появились во времена Эйнштейна [8, 9], кротовые норы рассматривал в своей геометродинамике Уилер [10, 11], Моррис, Торн и Юртсевер рассматривали «проходимые» кротовые норы [12], обзор исследований можно найти в работе [13]. Для существования кротовых нор требуется присутствие экзотической формы материи, нарушающей энергетические условия [12–15]. Одной из моделей такой материи является фантомное скалярное поле, которое допускает решения описывающие кротовые норы [16–20]. Наиболее исследованными являются статические, сферически симметричные кротовые норы в силу их более высокой симметрии. Одним из обобщением исследований является построение решений, описывающих несколько кротовых нор. В нашей работе построено решение, описывающее несколько кротовых нор в теории гравитации со скалярным полем. В этом параграфе рассмотрено статическое сферически-симметричное решение кротовой норы в теории гравитации со скалярным полем [17, 18], рассмотрена аксиально - симметричная метрика Вейля пространства-времени, выписаны уравнения Эйнштейна и уравнение поля.

Рассмотрим теорию гравитации с безмассовым фантомным скалярным полем ϕ , описываемую действием следующего вида:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi), \quad (0.1)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, R — скалярная кривизна. Вариация действия по метрике $g_{\mu\nu}$ и полю ϕ приводит к уравнениям Эйнштейна и уравнению движения скалярного поля, соответственно:

$$R_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \quad (0.2)$$

$$\nabla^\nu \nabla_\nu \phi = 0. \quad (0.3)$$

¹ E-mail: aiegorov@mail.ru

² E-mail: pkashargin@mail.ru

³ sergey_sushkov@mail.ru

Приведем статическое сферически симметричное решение кротовой норы в теории гравитации с безмассовым фантомным скалярным полем [17, 18]

$$ds^2 = -e^{2u} dt^2 + e^{-2u} [dr^2 + (r^2 + a^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (0.4)$$

$$\phi(r) = \frac{2^{1/2}(m^2 + a^2)^{1/2}}{m} u(r), \quad (0.5)$$

где $r \in (-\infty, +\infty)$, m, a — константы интегрирования и $u(r) = \frac{m}{a} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right)$. Параметр m является асимптотической массой кротовой норы, которую видит удаленный наблюдатель в той части пространства, где координата r принимает положительное значение. *Горловиной* кротовой норы будем называть пространственную двумерную сферу $r = 0$. В случае $m = 0$ решение принимает особенно простой вид:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (0.6)$$

$$\phi(r) = \sqrt{2} \left(\arctan \frac{r}{a} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (0.7)$$

Поле двух покоящихся гравитационных центров обладает осевой симметрией. В случае аксиально симметричных полей тяготения метрика пространства-времени может быть представлена в форме [5]⁴

$$ds^2 = -e^{2\lambda} dt^2 + e^{2(\nu-\lambda)} [d\rho^2 + dz^2] + \rho^2 e^{-2\lambda} d\varphi^2, \quad (0.8)$$

где $\rho \in [0, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — цилиндрические координаты, ν и λ — функции переменных ρ и z . Метрика (0.8) называется метрикой Вейля, координаты ρ, z, φ будем называть *координатами Вейля*. Рассмотрим теорию гравитации (0.1) с фантомным скалярным полем $\phi = \phi(\rho, z)$ в пространстве-времени, обладающем аксиальной симметрией и описываемом метрикой (0.8). По аналогии с [5], уравнения Эйнштейна и уравнение движения поля могут быть представлены в виде

$$\Delta\nu - \left(\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{\rho} \right) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (0.9)$$

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \frac{\nu_1}{\rho} = \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \phi_2^2), \quad (0.10)$$

$$2\lambda_1\lambda_2 - \frac{\nu_2}{\rho} = \phi_1\phi_2, \quad (0.11)$$

$$\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{\rho} = 0, \quad (0.12)$$

$$\Delta\phi + \frac{\phi_1}{\rho} = 0, \quad (0.13)$$

где нижние индексы означают производные по координатам $x^1 = \rho$, $x^2 = z$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Уравнения (0.9-0.12) являются независимыми комбинациями уравнений Эйнштейна, а (0.13) это уравнение скалярного поля. Уравнение (0.9) является дифференциальным следствием уравнений (0.10-0.13) системы. Условие интегрируемости уравнений (0.10, 0.11)

$$2\lambda_2 \left(\Delta\lambda + \frac{\lambda_1}{\rho} \right) + \phi_2 \left(\Delta\phi + \frac{\phi_1}{\rho} \right) = 0 \quad (0.14)$$

является следствием уравнений (0.12, 0.13). В дальнейшем уравнения (0.12, 0.13) будем называть *условием интегрируемости* системы (0.10, 0.11). Таким образом, если найдены решения λ и ϕ уравнений (0.12) и (0.13), то (0.10, 0.11) интегрируемы и функция ν выражается криволинейным интегралом

$$\nu = \int_l \rho \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \right] d\rho - \rho [2\lambda_1\lambda_2 - \phi_1\phi_2] dz \quad (0.15)$$

по произвольному непрерывному пути l , соединяющему некоторую фиксированную точку (ρ_0, z_0) с точкой (ρ, z) . Выбор (ρ_0, z_0) определяется граничными условиями на функцию ν . Так как уравнения (0.12, 0.13) линейны по функциям λ и ϕ , значит любая линейная комбинация с постоянными

⁴ Аксиально симметричная метрика может быть приведена к виду (0.8), если тензор Риччи подчиняется соотношению $R_0^0 + R_3^3 = 0$, которые выполняются в силу уравнений Эйнштейна (0.2) для скалярного поля $\phi(\rho, z)$.

коэффициентами нескольких решений $\lambda^{(k)}$ и $\phi^{(k)}$ этих уравнений $\lambda = \sum \lambda^{(k)}$, $\phi = \sum \phi^{(k)}$ снова будет их решением. Далее, по суперпозированным λ и ϕ можно найти отвечающую им функцию ν из (0.15), то есть получить новое решение.

1. Суперпозиция решений кротовых нор

В этом параграфе будут приведены преобразования, связывающие координаты Вейля и сферические координаты, метрика сферически симметричной кротовой норы будет представлена в аксиально симметричном виде в координатах Вейля, будет произведено сложение двух решений, описывающих кротовые норы в теории гравитации со скалярным полем. Сферически-симметричная

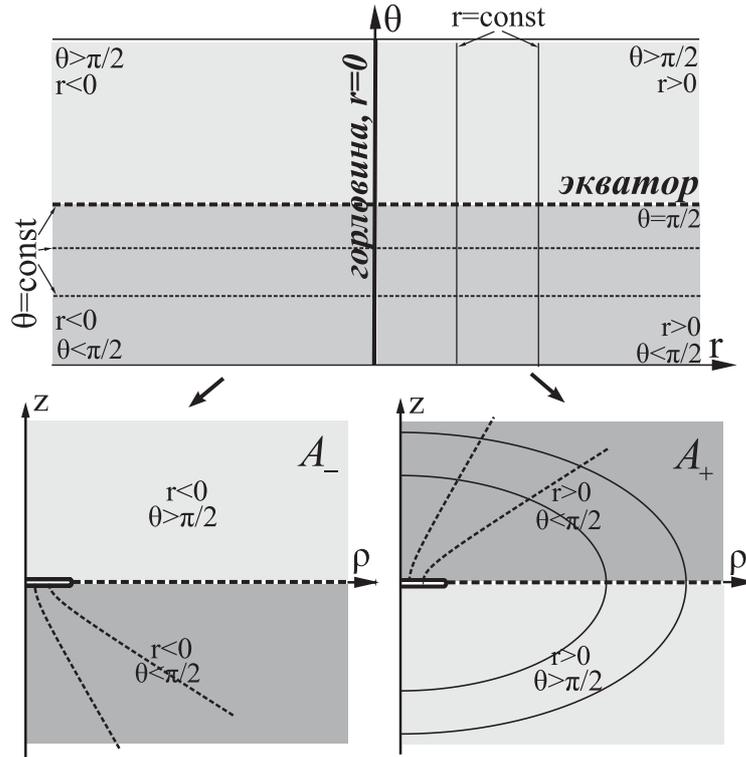


Рис. 1. Рисунок иллюстрирует преобразование координат (1.1): $(r, \theta) \rightarrow (\rho, z)$. Вверху изображена область изменения координат (r, θ) , это бесконечная полосы шириной π , горловине соответствует вертикальный отрезок $r = 0$, $\theta \in [0, \pi)$. В вейлевых координатах (ρ, z) пространство описывается двумя картами: A_+ покрывает область с $r > 0$, A_- – область с $r < 0$. Области изменения координат (ρ, z) – полуплоскости. Линии $r = const$ в координатах (ρ, z) являются полуэллипсами, линии $\theta = const$ – гиперболы. Граница карт проходит по горловине, которая соответствует двустороннему отрезку $z = 0$, $\rho \in [0, a]$.

метрика является частным случаем более общей, аксиально-симметричной метрики пространства-времени. Следовательно статическое сферически-симметричное решение (0.4, 0.5), описывающее кротовую нору, может быть представлено в аксиально-симметричном виде (0.8). Координатные преобразования, связывающие сферические координаты (r, θ, φ) и координаты Вейля (ρ, z, φ) имеют вид

$$\begin{cases} \rho(r, \theta) = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta, \\ z(r, \theta) = r \cos \theta. \end{cases} \quad (1.1)$$

Преобразование временной координаты t и полярного угла φ тождественные. Координаты пробегают следующие интервалы значений:

$$r \in (-\infty, \infty), \quad \theta \in [0, \pi]; \quad (1.2)$$

$$\rho \in [0, \infty), \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (1.3)$$

Диапазон изменения координат (r, θ) в декартовых координатах представляет собой бесконечную полосу шириной π , диапазон изменения координат (ρ, z) — полуплоскость. Преобразование координат (1.1) неоднозначно в указанных областях и отождествляет точки $(t, r, \theta, \varphi) \sim$

$(t, -r, \pi - \theta, \varphi)$. Преобразование станет однозначным, если, например, ограничится рассмотрением области пространства-времени $A_+ := \{(t, r, \theta, \varphi) \mid r > 0\}$ или, наоборот, области $A_- := \{(t, r, \theta, \varphi) \mid r < 0\}$. Мы получаем набор из двух карт: карта A_+ покрывает область пространства с $r > 0$, а A_- покрывает область с $r < 0$. Приведем обратное координатное преобразование

$$\begin{cases} r = \pm 2^{-1/2} \left[\rho^2 + z^2 - a^2 + [(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 - 4a^2 z^2]^{1/2} \right]^{1/2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{r(\rho, z)}, \end{cases} \quad (1.4)$$

где знак «+» в выражении для функции $r(\rho, z)$ соответствует области A_+ , «-» – области A_- . Якобиан преобразования

$$\frac{D(\rho, z)}{D(r, \theta)} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

обращается в ноль при $r = 0$, $\theta = \pi/2$, что соответствует линии экватора горловины кротовой норы.

Решение, описывающее сферически симметричную кротовую нору (0.4) в координатах Вейля принимает вид:

$$ds^2 = -e^{2\lambda_{\pm}} dt^2 + e^{2(\nu_{\pm} - \lambda_{\pm})} [d\rho^2 + dz^2] + \rho^2 e^{-2\lambda_{\pm}} d\varphi^2, \quad (1.5)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{m}{a} \operatorname{arccctg} \frac{r_{\pm}(\rho, z)}{a}, \quad \nu_{\pm} = \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\pm}^2(\rho, z)(r^2(\rho, z) + a^2)}{r_{\pm}^4(\rho, z) + a^2 z^2}, \quad (1.6)$$

$$\phi_{\pm} = \sqrt{2(m^2 + a^2)} m^{-1} \lambda_{\pm}. \quad (1.7)$$

где решение с индексом «+» соответствует карте A_+ ($r > 0$), решение с индексом «-» – A_- ($r < 0$). Функции r_+ и r_- равны

$$r_{\pm}(\rho, z) = \pm 2^{-1/2} \left[\rho^2 + z^2 - a^2 + [(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 - 4a^2 z^2]^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (1.8)$$

При переходе через границу двух карт ($r = 0$) решение (1.5-1.7) для A_- непрерывно и гладко переходит в решение для A_+ . Характер координатного преобразования поясняется на рис. 1. Граница карт A_+ и A_- проходит по горловине кротовой норы $r = 0$. Горловина кротовой норы при этом преобразование переходит в двусторонний диск: $z = 0$, $\rho \in [0, a]$, на плоскости (ρ, z) ему соответствует двухсторонний отрезок. Для прояснения топологической структуры на рисунке изображены несколько координатных линий: линии $r = \text{const}$, которым соответствуют тонкие сплошные кривые, и линии $\theta = \text{const}$, обозначенные штрихпунктирными кривыми. Линии $r = \text{const}$ в координатах (ρ, z) переходят в полуэллипсы, причем каждая координатная линия расположена целиком в одной из карт. Линии $\theta = \text{const}$ в координатах (ρ, z) преобразуются в гиперболы, причем, так как координатные линии проходят сквозь горловину кротовой норы, то они располагаются в обоих картах. Как и следовало ожидать, скалярная кривизны метрики (1.5) в координатах Вейля

$$R = \frac{2(m^2 + a^2)e^{2\lambda(\rho, z)}}{(r^2(\rho, z) + a^2)^2}, \quad (1.9)$$

и всюду ограничена, на горловине $r = 0$ ($\rho \in [0, a]$, $z = 0$) равна $2(m^2 + a^2)e^{-\pi} a^{-4}$.

Уравнения Эйнштейна и уравнение поля не содержат явно координаты z , поэтому после замены $z \rightarrow z - z_0$ в решении (1.5), получим новое решение, описывающее сферически симметричную кротовую нору, помещенную в точку со значением z_0 на оси z . Будем далее обозначать функции λ , отвечающую решению кротовой норы с асимптотической массой m и параметром горловины a , помещенную в точку z_0 оси z , записанной в вейлевой системе координат, через $\lambda(\rho, z, z_0, m, a)$, или короче $\lambda(z_0, m, a)$, указывая лишь значения параметров, т.е.

$$\lambda(z_0, m, a) = \frac{m}{a} \operatorname{arccctg} \frac{r(\rho, z - z_0)}{a}, \quad (1.10)$$

где $r(\rho, z - z_0)$ имеет вид

$$r(\rho, z - z_0) = \pm 2^{-1/2} \left[\rho^2 + (z - z_0)^2 - a^2 + [(\rho^2 + (z - z_0)^2 - a^2)^2 - 4a^2(z - z_0)^2]^{1/2} \right]^{1/2}.$$

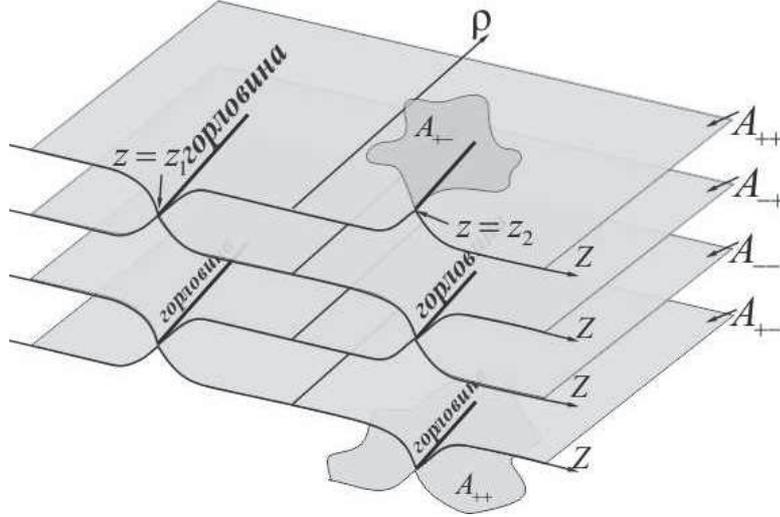


Рис. 2. Геометрия пространства двух кротовых нор (координатная поверхность ρ и z , сечение $t = const$, $\varphi = const$).

Уравнения (0.12, 0.13) линейны по функциям λ и ϕ , значит любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами нескольких решений $\lambda^{(k)}$ и $\phi^{(k)}$ этих уравнений $\lambda = \sum \lambda^{(k)}$, $\phi = \sum \phi^{(k)}$ снова будет их решением. Далее, по этим значениям λ и ϕ можно найти отвечающую им функцию ν (0.15), то есть получить новое решение уравнений. Осуществим сложение решений для случая двух произвольных сферически симметричных кротовых нор (1.5-1.6) с асимптотическими массами m_1 и m_2 и параметрами горловины a_1 и a_2 , находящиеся в точках z_1 и z_2 оси z . Так как скалярное поле ϕ пропорционально гравитационному потенциалу λ , рассмотрим сложение гравитационных потенциалов, предполагая для скалярного поля справедливым тот же закон сложения, что и для λ . Следуя [4], сложение можно осуществить, если взять такое правило

$$\lambda = k_1 \lambda_{\pm}(z_1, m = m_1 + m_2, a_1) + k_2 \lambda_{\pm}(z_2, m = m_1 + m_2, a_2), \quad (1.11)$$

где k_1, k_2 – числа, удовлетворяющие условию $k_1 + k_2 = 1$. Тогда при $z_k \rightarrow z_0$ и $a_k \rightarrow a$, очевидно, получим

$$\lambda = (k_1 + k_2) \lambda_{\pm}(z_0, m = m_1 + m_2, a) = \lambda_{\pm}(z_0, m = m_1 + m_2, a), \quad (1.12)$$

т.е. получим решение для сферически симметричной кротовой норы с асимптотической массой $m = m_1 + m_2$, помещенной в точке $z = 0$. Выбор коэффициентов k_1 и k_2 , которые будем называть весовыми [4], вообще говоря, произволен (лишь бы $k_1 + k_2 = 1$), но надо потребовать, чтобы выполнялись условия:

$$\text{при } m_1 = 0, m_2 \neq 0 \text{ должно быть } k_1 = 0, k_2 = 1, \quad (1.13)$$

$$\text{при } m_1 \neq 0, m_2 = 0 \text{ должно быть } k_1 = 1, k_2 = 0. \quad (1.14)$$

Следуя [4], выберем их такими

$$k_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad k_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.15)$$

Для скалярного поля возьмем такое же правило сложения

$$\phi = k_1 \phi_{\pm}(z_1, m = m_1 + m_2, a_1) + k_2 \phi_{\pm}(z_2, m = m_1 + m_2, a_2). \quad (1.16)$$

Подставляя функции λ и ϕ в (0.15), найдем функцию ν .

Каждое из исходных решений описывалось двумя функциями λ , а именно λ_+ и λ_- . Поэтому для суммарного гравитационного потенциала λ (2.16) получаем четыре различные комбинации из функций $\lambda_+(z_k, m, a_k)$ и $\lambda_-(z_k, m, a_k)$ ($k = 1, 2$) (и аналогичные комбинации для скалярного

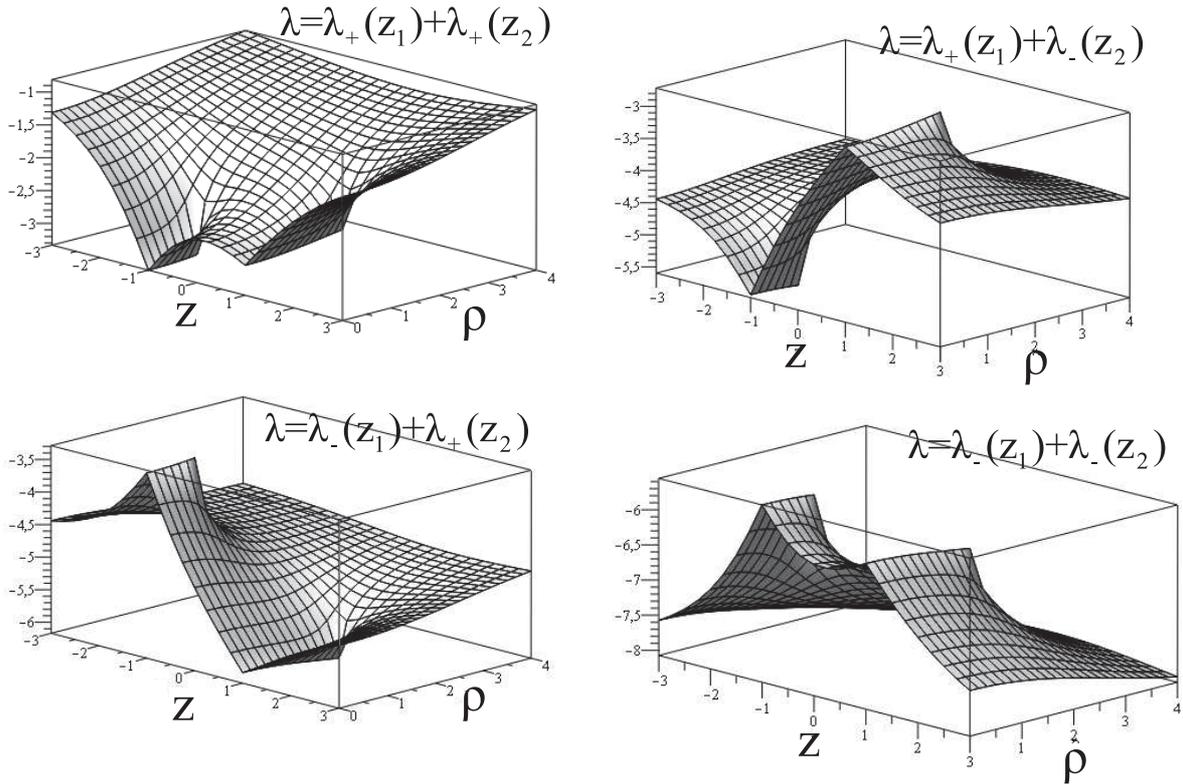


Рис. 3. Гравитационный потенциал $\lambda(\rho, z)$ в областях A_{++} : $\lambda = \lambda_+(z_1) + \lambda_+(z_2)$, A_{-+} : $\lambda = \lambda_-(z_1) + \lambda_+(z_2)$, A_{+-} : $\lambda = \lambda_+(z_1) + \lambda_-(z_2)$, A_{--} : $\lambda = \lambda_-(z_1) + \lambda_-(z_2)$ в случае $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $m = 1$.

поля), и четыре различных решения для функции ν (0.15) для каждой комбинации соответственно. Введем обозначение:

$$\lambda_{(\pm, \pm)} = k_1 \lambda_{\pm}(z_1, m = m_1 + m_2, a_1) + k_2 \lambda_{\pm}(z_2, m = m_1 + m_2, a_2). \quad (1.17)$$

Возникает вопрос, как полученные для каждой из комбинаций $\lambda_{(\pm, \pm)}$ решения будут связаны друг с другом? Пространство каждой из исходных кротовых нор в вейлевых координатах описывалось двумя картами, A_+ и A_- . Пересекая горловину кротовой норы, мы попадаем из области A_+ в область A_- , при этом значение гравитационного потенциала в области A_+ описывалось функцией λ_+ , в области A_- оно будет описываться функцией λ_- . Гравитационный потенциал при переходе с карты на карту через горловину меняется непрерывно и гладко. Требование непрерывности функции λ приводит к такому же правилу для суммы двух решений. Допустим, что мы находимся в области, где гравитационный потенциал имеет значение $\lambda_{(+, +)} = k_1 \lambda_+(z_1, a_1) + k_2 \lambda_+(z_2, a_2)$. Пересекая горловину первой кротовой норы (расположенной в точке $z = z_1$) соответствующее ей слагаемое в гравитационном потенциале должен изменить свое значение с $\lambda_+(z_1, a_1)$ на $\lambda_-(z_1, a_1)$. Таким образом горловина первой кротовой норы соединяет решение для $\lambda_{(+, +)}$ с решением для $\lambda_{(-, +)}$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что горловина второй кротовой норы соединяет решение для $\lambda_{(-, +)}$ с решением для $\lambda_{(-, -)}$; горловина первой кротовой норы соединяет решение для $\lambda_{(-, -)}$ с решением для $\lambda_{(+, -)}$; и, наконец, горловина второй кротовой норы соединяет решение для $\lambda_{(+, -)}$ с решением для $\lambda_{(+, +)}$. Таким образом, мы получим набор из четырех карт соответствующих четырем комбинациям гравитационного потенциала⁵ (2.16). Карту, описывающую решение для $\lambda_{(\pm, \pm)}$ обозначим $A_{\pm\pm}$. В каждой карте расположены две горловины, т.е. удаленный наблюдатель в каждой из областей $A_{\pm\pm}$ видит две кротовые норы. Во всем пространстве времени мы имеем

⁵Совпадение гравитационного потенциала не означает, что мы оказались в той же области пространства. Не исключено, что это новая, ранее не рассматриваемая область пространства, но с тем же значением величин λ и ϕ . В общем случае мы получим набор из $4k$ карт ($k = 1, 2, \dots$) или бесконечного набора карт.

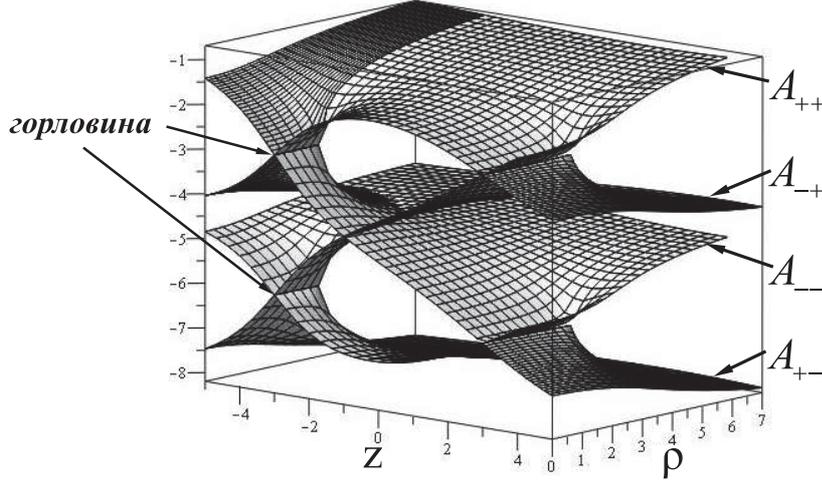


Рис. 4. На рисунке представлена функция гравитационного потенциала $\lambda(\rho, z)$ одновременно для четырех карт A_{++} , A_{-+} , A_{+-} , A_{--} в случае $z_1 = -3$, $z_2 = 3$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = 3$, $m = 1$.

четыре кротовые норы. Границы карт проходят по горловинам кротовых нор. Рис. 2 иллюстрирует топологическую структуру многообразия. При переходе с карты на карту гравитационный потенциал и функция скалярного поля ведут себя непрерывно и гладко. График функции скалярного поля $\lambda(\rho, z)$ для каждой из карт приведен на рис. 3, 4, график скалярного поля $\phi(\rho, z)$ имеет аналогичный вид.

Функция $\nu(\rho, z)$ определяется выражением (0.15). Потребуем выполнение следующего граничного условия:

$$\nu(\rho = +\infty, z = +\infty) = 0 \quad \text{в области } A_{++}, \quad (1.18)$$

что соответствует $\rho_0 = +\infty$, $z_0 = +\infty$ в (0.15). В случае, если $(\rho, z) \in A_{++}$, то кривая интегрирования l может быть расположена в области A_{++} , в качестве кривой удобно взять ломанную

$$\nu(R, z) = \int_{\rho_0}^R \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \right] d\rho - \int_{z_0}^z \rho [2\lambda_1\lambda_2 - \phi_1\phi_2] dz \Bigg|_{\rho=\rho_0}. \quad (1.19)$$

В случае, если (ρ, z) расположена в другой карте многообразия, кривая интегрирования l будет переходить с карты на карту. Вследствие этого значение функции ν на бесконечности $\rho \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$ в картах A_{-+} , A_{+-} , A_{--} могут отличаться от нуля на некоторое постоянное значение. Получим

$$\nu(R, z) = \int_{\rho_0}^R \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \right] d\rho - \int_{z_0}^z \rho [2\lambda_1\lambda_2 - \phi_1\phi_2] dz \Bigg|_{\rho=\rho_0} + \nu(\rho_0, z_0), \quad (1.20)$$

где $\nu(\rho_0, z_0) = 0$ в случае $(\rho, z) \in A_{++}$. Функция ν приведена на рис. 5. Отметим, что разрывы функции по обе стороны от горловин в карте A_{++} и A_{-+} отличаются только знаком и равны по абсолютной величине, что обеспечивает непрерывность функции ν при переходе из одной карты в другую. В силу четности ν относительно λ и ϕ ее значения в области A_{++} совпадают со значениями в области A_{--} , а значения в области A_{-+} — со значениями в A_{+-} .

В заключение этого раздела отметим, что данный подход позволяет получить решение, описывающее произвольное число кротовых нор, расположенных на оси z . Рассмотрим суперпозицию n кротовых нор, для этого возьмем n сферически симметричных решения, расположенных в точках z_s ($s = 1, \dots, n$) на оси z . Для гравитационного потенциала выберем закон сложения

$$\lambda = \sum_{s=1}^n k_s \lambda_{\pm}(z_s, m, a_s), \quad \text{где } m = \sum_{s=1}^n m_s, \quad k_s = \frac{m_s}{m}. \quad (1.21)$$

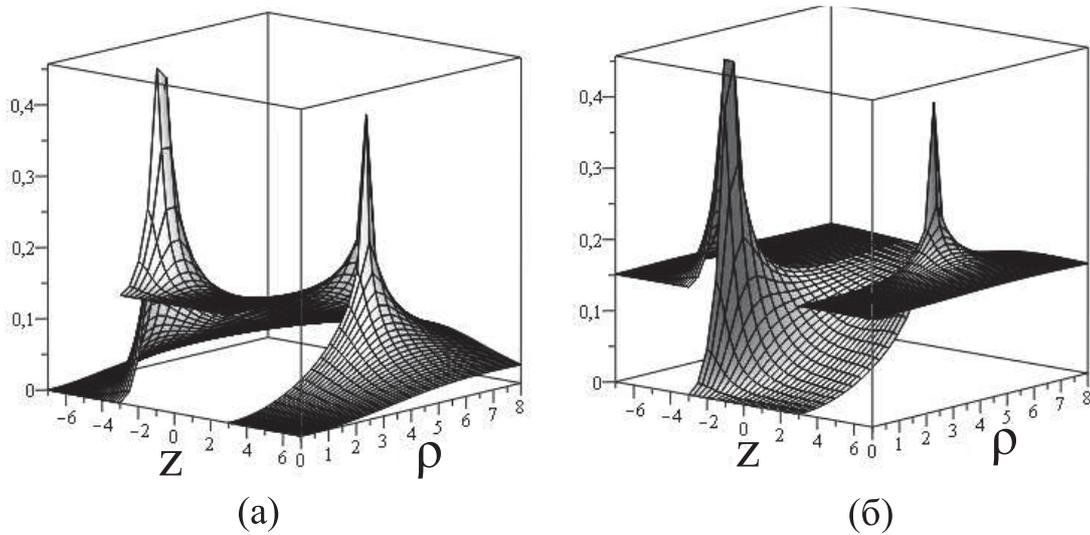


Рис. 5. График функции $\nu(\rho, z)$ в областях A_{++}, A_{--} (рис. а), в областях A_{-+}, A_{+-} (рис. б) в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = 5$, $z_1 = -3$, $z_2 = 3$.

В этом случае мы будем иметь 2^n различных комбинаций для λ и ϕ , для каждого из которых функция $\nu(\rho, z)$ определяется выражением (0.15). Координатную область каждого решения обозначим как $A_{\pm\dots\pm}$, в результате получим набор 2^n карт. Каждая из карт соединена через горловины кротовых нор с другими картами пространства. Например, пересекая горловину кротовой норы, расположенной в точке z_1 оси z мы из области $A_{+\dots}$ попадем в область $A_{-\dots}$.

Заключение

Получено решение, описывающее две кротовые норы в теории гравитации с фантомным скалярным полем в аксиально симметричном пространстве-времени. Для построения решения был использован следующий подход: взято решение, описывающее статическую сферически симметричную кротовую нору в теории гравитации со скалярным полем (0.4, 0.5), решение было представлено в осесимметричной вейлевой системе координат (1.5-1.7), затем в этой системе координат центр решения был сдвинут по оси z посредством замены $z \rightarrow z - z_0$, в результате получено поле сферически симметричной кротовой норы, находящейся в точке z_0 оси z . Далее, складывая гравитационные потенциалы $\lambda(z_k, m, a_k)$ ($k = 1, 2$) для двух кротовых нор, находящихся в точках z_1 и z_2 (2.16), получено решение для двух покоящихся кротовых нор. Полученное решение описывается набором из четырех карт, решение обладает четырьмя плоскими асимптотиками. Аналогичным образом построено аксиально симметричное решение, описывающее n кротовых нор. В этом случае пространство-время обладает 2^n различными асимптотически плоскими областями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Curzon H.E.J. Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations // Proc. London Math. Soc. 1924. vol. 23. p. 477-480.
2. Israel W., Khan K.A. Collinear particles and Bondi dipoles in general relativity // N. Cim. 1964. vol. 33. p. 331-344.
3. Кайгородов В.Р. О метрике поля тяготения с двумя точечными частицами // Гравитация и теория относительности. Изд-во КГУ. 1968. Вып. 4-5. С. 176-179.
4. Гаврилов С.П. Суперпозиция решений Шварцшильда и метрика гравитационного диполя // Гравитация и теория относительности. Изд-во КГУ. 1971. Вып. 8. С. 30-37.
5. Synge J. L. Relativity: the general theory. North-Holland publishing company, Amsterdam, 1960. 379 p.

6. Exact solutions of Einstein's field equations. Stephani H., Kramer D., Maccallum M., Hoenselaers C., Herlt E. (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. 2009. 732 p.
7. Егоров А.И. О суперпозиции двух решений Нордстрема-Рейснера // Гравитация и теория относительности. Изд-во КГУ. 1970. Вып. 7. С.42–49.
8. Flamm L. Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie // Physikalisches Zeitschrift. 1916. Vol. 17. p. 448.
9. Einstein A., Rosen N. The particle problem in the General theory of Relativity // Physical Review. 1935. Vol. 48. P. 73–77.
10. Wheeler J.A. Geons // Physical Review. 1955. Vol. 97. P. 511–536.
11. Wheeler J.A. Geometrodynamics. New York: Academic Press. 1962. 334 P.
12. Morris M. S., Thorne K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. № 5, P. 395–412.
13. Visser M. Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking. Woodbury. American Institute of Physics. 1995. 412 p.
14. Hochberg D., Visser M. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat // Physical Review D. 1997. Vol. 56. P.4745–4755.
15. Hochberg D., Visser M. Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions // Physical Review D. 1998. Vol.58. P. 044021.
16. Kodama T., General-relativistic nonlinear field: A kink solution in a generalized geometry // Physical Review D. 1978. Vol. 18. P.3529.
17. Ellis H.G., Ether flow through a wormhole: A particle model in general relativity // Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14. P. 104.
18. Bronnikov K.A., Scalar-tensor theory and scalar charge // Acta Physica Polonica B. 1973. Vol. 4. P.251.
19. Armendariz-Picon C. On a class of stable, traversable Lorentzian wormholes in classical general relativity // Physical Review D. 2002. Vol. 65. P. 104010.
20. Hayward S.A., Kim S.-W., Lee H. Dilatonic wormholes: Construction, operation, maintenance, and collapse to black holes // Physical Review D. 2002. Vol. 65. P. 064003.

Поступила в редакцию 01.12.2012

Егоров Анатолий Иванович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Кашаргин Павел Евгеньевич, к. ф.-м. н., ассистент, кафедра теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.
E-mail: aiegorov@mail.ru

Сушков Сергей Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.
E-mail: pkashargin@mail.ru

A. I. Egorov, P. E. Kashargin, S. V. Sushkov
Scalar multi-wormholes

Keywords: general theory of relativity, wormholes, scalar field.

PACS: 04.20.-q

We construct a new axially symmetric solution describing n wormholes in a gravitational theory of a scalar field. The space-time of multi-wormholes solution has a complicated topological structure. The space-time possesses 2^n asymptotically flat regions.

REFERENCES

1. Curzon H.E.J. *Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations*, Proc. London Math. Soc., 1924, vol. 23, pp. 477–480.
2. Israel W., Khan K.A. *Collinear particles and Bondi dipoles in general relativity*, N. Cim., 1964, vol. 33, pp. 331–344.
3. Kajgorodov V.R. *O metrike polja tjugotenija s dvumja tochechnymi massami* (Metric of gravitation field of two point masses), Gravitacija i teorija odnositel'nosti. Kazan: KSU, 1968, vol. 4-5, pp. 176–179.
4. Gavrilo S.P. *Superpozicija reshenij shvarcshil'da i metrika gravitacionogo dipolja* (Superpositions of the Schwarzschild solutions and metric of gravitational dipoles), Gravitacija i teorija odnositel'nosti. Kazan: KSU, 1971. vol. 8, pp. 30–37.
5. Synge J.L. *Relativity: the general theory*. North-Holland publishing company, Amsterdam, 1960, 379 p.
6. Stephani H., Kramer D., Maccallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact solutions of Einstein's field equations* (2nd ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 732 p.
7. Egorov A.I. *O superpozicii dvuh reshenij Nordstrema-Rejsnera* (Superpositions of two Reissner–Nordstrom solutions), Gravitacija i teorija odnositel'nosti. Kazan: KSU, 1970, vol. 7., pp. 42–49.
8. Flamm L. *Beitrag zur Einsteinschen Gravitationstheorie*, Physikalische Zeitschrift, 1916, vol. 17, p. 448.
9. Einstein A., Rosen N. *The particle problem in the Gheneral theory of Ralativity*, Physical Review, 1935, vol. 48, pp. 73–77.
10. Wheeler J.A. *Geons*, Physical Review, 1955, vol. 97, pp. 511–536.
11. Wheeler J.A. *Geometrodynamics*, New York: Academic Press, 1962, 334 P.
12. Morris M.S., Thorne K.S. *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, Am. J. Phys., 1988, vol. 56, № 5, pp. 395–412.
13. Visser M. *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*. Woodbury. American Institute of Physics, 1995, 412 p.
14. Hochberg D., Visser M. *Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat*, Physical Review D, 1997, vol. 56, pp. 4745–4755.
15. Hochberg D., Visser M. *Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions*, Physical Review D, 1998, vol. 58, p. 044021.
16. Kodama T., *General-relativistic nonlinear field: A kink solution in a generalized geometry*, Physical Review D, 1978, vol. 18, P. 3529.
17. Ellis H.G. *Ether flow through a wormhole: A particle model in general relativity*, Journal of Mathematical Physics, 1973, vol. 14, p. 104.
18. Bronnikov K.A. *Scalar-tensor theory and scalar charge*, Acta Physica Polonica B, 1973, vol. 4. p. 251.
19. Armendariz-Picon C. *On a class of stable, traversable Lorentzian wormholes in classical general relativity*, Physical Review D, 2002, vol. 65, p. 104010.
20. Hayward S.A., Kim S.-W., Lee H. *Dilatonic wormholes: Construction, operation, maintenance, and collapse to black holes*, Physical Review D, 2002, vol. 65, p. 064003.

Received 01.12.2012

Egorov Anatolij Ivanovich, Associate professor, Department of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.

Kashargin Pavel Evgenievich, Assistant, Department of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: aiegorov@mail.ru

Sushkov Sergey Vladimirovich, Professor, Department of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: pkashargin@mail.ru